

Załącznik 2a.
do wniosku o przeprowadzenie postępowania habilitacyjnego
dr Małgorzaty Klaudii Guzowskiej

AUTOREFERAT

**PRZEDSTAWIAJĄCY OPIS DOROBKU NAUKOWEGO, OSIĄGNIĘĆ
NAUKOWYCH ORAZ OSIĄGNIĘĆ DYDAKTYCZNYCH,
ORGANIZATORSKICH I POPULARYZATORSKICH PO UZYSKANIU
TYTUŁU DOKTORA NAUK EKONOMICZNYCH
LATA 2003-2019**

Spis treści:

1. IMIĘ I NAZWISKO:.....	3
2. POSIADANE DYPLOMY, STOPNIE NAUKOWE/ ARTYSTYCZNE – Z PODANIEM NAZWY, MIEJSCA I ROKU ICH UZYSKANIA ORAZ TYTUŁU ROZPRAWY DOKTORSKIEJ: 3	
3. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA AKTYWNOŚCI ZAWODOWEJ:	3
3.1. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/ artystycznych:	3
3.2. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu poza jednostkami naukowymi:	4
3.3. Kursy i szkolenia	5
4. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA PRACY NAUKOWO-BADAWCZEJ ORAZ ZAINTERESOWAŃ NAUKOWYCH:	6
5. OSIĄGNIĘCIE NAUKOWE (o którym mowa w art.16. ust. 2. ustawy z dnia 14 marca 2003r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytułach w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.))	8
5.1. Tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego	8
5.2. Skład jednotematycznego cyklu publikacji wskazanego jako osiągnięcie naukowe będące znaczącym wkładem w rozwój dyscypliny naukowej ekonomia.....	8
5.3. Uzasadnienie wyboru obszaru cyklu publikacji	9
5.4. Kluczowe osiągnięcia w ramach cyklu publikacji.....	11
Literatura:.....	22
6. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH	25
6.1. Problematyka badawcza	25
Metody pomiaru produktywności i efektywności	25
Zastosowanie metod matematycznych oraz ilościowych do pomiaru i analizy zjawisk ekonomicznych i społecznych.....	26
6.2. Projekty badawcze	27
6.3. Konferencje naukowe.....	28
6.4. Nagrody i stypendia.....	29
7. INFORMACJA O OSIĄGNIĘCIACH DYDAKTYCZNYCH, WSPÓŁPRACY Z INSTYTUCJAMI, ORGANIZACJAMI I TOWARZYSTWAMI NAUKOWYMI ORAZ O DZIAŁALNOŚCI POPULARYZUJĄCEJ NAUKĘ	30
7.1. Działalność dydaktyczna	30
7.2. Działalności organizacyjna, popularyzatorska, współpraca z instytucjami i organizacjami naukowymi	31

1. IMIĘ I NAZWISKO: **Małgorzata Klaudia Guzowska**

2. POSIADANE DYPLOMY, STOPNIE NAUKOWE/ ARTYSTYCZNE – Z PODANIEM NAZWY, MIEJSCA I ROKU ICH UZYSKANIA ORAZ TYTUŁU ROZPRAWY DOKTORSKIEJ:

1996 – **magister matematyki**, Uniwersytet Szczeciński, Wydział Matematyczno-Fizyczny.
Tytuł pracy: Numeryczne rozwiązanie równań różniczkowych zwyczajnych.
Promotor: prof. dr hab. Jan Purczyński.

2003 – **doktor nauk ekonomicznych**, specjalność ekonomia matematyczna, Uniwersytet Szczeciński, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania. Tytuł pracy: „Wykorzystanie nieliniowych równań różniczkowych do opisu i analizy zjawisk ekonomicznych”.
Promotor: prof. dr hab. Waldemar Tarczyński, recenzenci: prof. dr hab. Krzysztof Jajuga, prof. dr hab. Józef Hozer.

2005 – Studia Podyplomowe „Rynek nieruchomości” w zakresie: Wycena Nieruchomości i Przedsiębiorstw, (świadczenie nr 18/W/2005), Szczecin.

2005 – Studia Podyplomowe „Rynek nieruchomości” w zakresie: Pośrednictwo i Zarządzanie Nieruchomościami, (świadczenie nr 20/PiZ/2005), Szczecin.

3. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA AKTYWNOŚCI ZAWODOWEJ:

3.1. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/ artystycznych:

2003-obecnie – Instytut Ekonometrii i Statystyki, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania Uniwersytet Szczeciński,

na stanowisku: **adiunkt.**

2007-2013 – PWSZ w Wałczu,

na stanowisku: **wykładowca.**

2004-2013 – Zakład Zastosowań Matematyki w Ekonomii, Katedra Ekonometrii i Statystyki, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, Uniwersytet Szczeciński,

na stanowisku: **kierownik zakładu** Zastosowań Matematyki w Ekonomii.

1999-2000 – Wyższa Szkoła Zawodowa „*Oeconomikus*”,

na stanowisku: **wykładowca.**

1997-2003 – Zakład Zastosowań Matematyki w Ekonomii, Katedra Ekonometrii i Statystyki,
Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, Uniwersytet Szczeciński,
na stanowisku: **asystent**.

3.2. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu poza jednostkami naukowymi:

- 2012** – *The World Bank*,
na stanowisku: **ekspert**, umowa o dzieło,
zakres obowiązków: opracowanie ekspertyzy „Analysis of public employment and wage developments and policies in 2007-2012 at the level of state budget in Poland”.
- 2011** – *MCC – Grupa*
na stanowisku: **ekspert**, umowa o dzieło,
zakres obowiązków: budowa bazy mierników dla Ministerstwa Spraw Zagranicznych.
- 2009** – *The World Bank*
na stanowisku: **ekspert**, umowa o dzieło,
zakres obowiązków: opracowanie ekspertyzy „Analysis of public employment and wage developments and policies in 2002-2008 at the level of state budget in Poland and assessment of savings potential in state budget in 2009-2012”.
- 2009** – *EIPA Antenna Warsaw – European Centre for Public Financial Management*
na stanowisku: **ekspert**,
zakres obowiązków: prowadzenie warsztatów z zakresu Budżetowania Zadaniowego (głównie pod względem budowy podzadań, celów, mierników) dla poszczególnych funkcji państwa.
- 2008** – *EIPA Antenna Warsaw – European Centre for Public Financial Management*,
na stanowisku: **ekspert**,
zakres obowiązków: prowadzenie warsztatów z zakresu Budżetowania Zadaniowego (głównie pod względem budowy podzadań, celów, mierników) dla poszczególnych funkcji państwa.
- 2007** – *Forum Gryf*,
na stanowisku: **wykładowca**,
zakres obowiązków: koordynowanie oraz prowadzenie szkoleń na rzecz Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego oraz Polskiej Akademii Nauk, z zakresu Budżetu Zadaniowego.
- 2007** – *Global Erisson Consulting*,
na stanowisku: **wykładowca**,
zakres obowiązków: prowadzenie szkoleń na rzecz Głównego Urzędu Miar z zakresu Budżetu Zadaniowego.
- 2007** – *Centrum Transferu Wiedzy i Technologii – Uniwersytet Szczeciński*,
na stanowisku: **wykładowca**,
zakres obowiązków: prowadzenie szkoleń na rzecz Ministerstwa Gospodarki z zakresu Budżetu Zadaniowego.
- 2005-2011** – *Instytut Analiz, Diagnoz i Prognoz Gospodarczych*,
na stanowisku: **wiceprezes ds. naukowych**,

zakres obowiązków: nadzór nad naukową stroną działalności Instytutu:

- koordynowanie prac zleconych, takich jak ekspertyzy, analizy czy diagnozy społeczne oraz gospodarcze,
- koordynowanie prac nad aplikacjami oraz realizowaniem projektów,
- nadzór merytoryczny nad projektami realizowanymi przez IADiPG,
- koordynowanie prac nad organizowaniem szkoleń, targów i konferencji.

1997 – Zachodniopomorska Agencja Doradztwa Finansowego i Szkoleń,
na stanowisku: **referent**.

3.3. Kursy i szkolenia

2015 – International Summer School: *Large Fluctuations and Extreme Events – Theory and Applications*, organizacja: School of Science na Technische Universität Dresden, Center for Dynamics (CfD) oraz Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, Drezno, Niemcy,

2014 – szkolenie: *Dofinansowanie projektów dla edukacji z Funduszy Unijnych w latach 2014-2020*, Poznań 10.10.2014, Nr 224/FEDU/10/14,

2006 – kurs: *Fundusze strukturalne, Fundusze unijne, Mechanizmy Finansowe EOG*, Szczecin,

2006 – szkolenie: *Bezpieczeństwo na rynku nieruchomości*, Szczecin,

2006 – szkolenie: *Sztuka komunikacji*, Szczecin,

2002 – Polsko - Amerykańska Letnia Szkoła Ekonomii - Błazejewko 2002 – „*The Valuation of Investment Assets. Derivative Securities for Polish Markets*”, Błazejewko,

2000 – kurs: *Szkoła Gieldowa* organizowana przez Giełdę Papierów Wartościowych w Warszawie i Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.

4. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA PRACY NAUKOWO-BADAWCZEJ ORAZ ZAINTERESOWAŃ NAUKOWYCH:

Pracę naukową rozpoczęłam w 1997 roku. Od początku moje zainteresowania naukowo-badawcze dotyczyły zastosowania metod matematycznych w ekonomii, szczególnie układów dynamicznych. W latach 1997-2003, przedmiotem mojego zainteresowania było wykorzystanie nieliniowych równań różnicowych w ekonomii. Zakończeniem tego okresu pracy była rozprawa doktorska: „Wykorzystanie nieliniowych równań różnicowych do opisu i analizy zjawisk ekonomicznych”. Równolegle w latach 1997-2003, moje zainteresowania naukowo-badawcze dotyczyły zastosowania szeroko rozumianych narzędzi metod numerycznych do analizy i opisu zjawisk ekonomicznych na rynkach kapitałowych. Wynikiem prowadzenia badań w tym nurcie był cykl artykułów napisanych wspólnie z prof. dr hab. Janem Purczyńskim oraz dr Magdaleną Mojsiewicz.

Od roku 2003, głównym tematem moich zainteresowań są własności dynamiczne modeli ekonomicznych na gruncie ekonomii matematycznej, jak również szeroko rozumiana równoważność tych modeli w czasie ciągłym i dyskretnym.

Na polu zastosowania równań różnicowych w ekonomii, od 2003 roku, współpracuję z Prof. Saberem Elaydi (Trinity University, Texas, USA). Efektem tej współpracy jest publikacja **A5**, opisana poniżej. Współpraca z Prof. Elaydi, jak i jego zespołem (dr Rafael Luis, Prof. Eduardo Baleira) jest przeze mnie kontynuowana do dnia dzisiejszego. Od 2006 roku w temacie dotyczącym dyskretyzacji stochastycznych równań różnicowych, przy zachowaniu nieujemności rozwiązań, które są bardzo istotne z punktu widzenia zastosowań w ekonomii, współpracuję z Prof. Alexandrą Rodkiną (University of the West Indies, Jamajka) oraz Prof. Johnem Appleby (Dublin City University, Irlandia). W wyniku tej współpracy powstały dwie publikacje **A9** oraz **M. Guzowska, J.A.D. Appleby i A. Rodkina (2007)**, opisane w dalszej części autoreferatu. Od 2009 roku w temacie wykorzystania rachunku na skalach czasowych jako narzędzia dyskretyzacji modeli ciągłych, współpracuję z dr hab. prof. PB Agnieszką Barbarą Malinowską (Politechnika Białostocka). Wynikiem tej współpracy są publikacje **A7** oraz **A8**, opisane poniżej.

Wyniki swoich prac przedstawiałam na konferencjach krajowych i zagranicznych. Szczególnie ważna była dla mnie możliwość zaprezentowania wyników swojej pracy badawczej Prof. Kazuo Nishimura (Kyoto University, Japonia), w 2010 roku, gdy przebywałam na Kyoto University, na zaproszenie Prof. Nishimura, jak też prezentacja moich wyników na konferencji *Matematyka i Informatyka na usługach ekonomii* (2011, 2015, 2016), tematycznych warsztatach *Modelli Dinamici in Economia e Finanza* (MDEF 2012, MDEF 2016, MDEF 2018) oraz *Nonlinear Economic Dynamics* (NED 2017) organizowanych przez Prof. Laurę Gardini (University of Urbino, Włochy). Uczestnictwo w warsztatach MDEF zaowocowało współpracą z Prof. Elisabetą Michetti (Macerata University, Włochy), wynikiem której jest publikacja **A4**, opisana poniżej.

Efektom prowadzonych (po doktoracie) prac są opublikowane artykuły oraz inne publikacje, które obejmują łącznie **40** pozycji, spośród których **7** ukazało się w czasopiśmie indeksowanym w JCR. Liczbowe zestawienie wszystkich publikacji wraz z statystykami przedstawia Tabela nr 1.

Tabela 1. Ilościowe zestawienie dorobku naukowego

Kategoria osiągnięć	Liczba publikacji	Współautorstwo	Publikacje w j. angielskim	Liczba punktów
Publikacje				
Autorstwo lub współautorstwo publikacji naukowych w czasopismach indeksowanych w JCR lub ERIH	7	6	7	177
Artykuły w czasopismach recenzowanych (Lista B)	20	11	7	142
Artykuły w czasopismach recenzowanych (poza listą A i B)	2	2	2	10
Redakcja monografii naukowych	2	-	-	10
Rozdziały w monografiach naukowych	7	4	3	29
Autorstwo podręczników i skryptów akademickich	2	2	-	10
Ogółem	40	25	19	378
Indeks h–Hirscha				
Web of Science	3			
Google Scholar	6			
Indeks cytowań	Liczba cytowań		bez autocytowań	
Web of Science	31		31	
Google Scholar	106		99	
Projekty naukowo-badawcze	Kierownik		Uczestnik	
międzynarodowe	4		2	
krajowe	-		2	

Spośród publikacji, **62%** opracowań, to publikacje współautorskie, zaś **38%** autorskie. Jednocześnie **48%** prac zostało opublikowanych w języku angielskim. Liczba cytowań (bez autocytowań), uwzględniająca indeks cytowań według Web of Science wynosi **31**, a wg Google Scholar – **99**. Wartość indeksu h–Hirscha, w ujęciu wskaźników wynosi: według Web of Science – **3**, a wg Google Scholar – **6**. Zgodnie z obowiązującymi przepisami dotyczącymi parametrycznej oceny jednostek naukowych, **sumaryczna liczba punktów** moich opublikowanych prac naukowych, bez uwzględnienia współautorstwa, wynosi **378** pkt., a mój Sumaryczny *Impact Factor* publikacji naukowych, według listy Journal Citation Reports (JCR), zgodnie z rokiem publikowania wynosi **9,089**.

W latach 2003-2019 uczestniczyłam w **8** projektach naukowo-badawczych, z czego **6** miało charakter międzynarodowy. Trzy z nich realizowane są w ramach Erasmus Plus, Key Action 2, jeden został zrealizowany w ramach programu INTERREG IIB, jeden w ramach Dekaban-Liddle Fellowship oraz jeden w ramach grantu MNiSW program: „Wspieranie Międzynarodowej Mobilności Naukowców”. Pozostałe dwa krajowe projekty były realizowane w ramach grantu KBN oraz ze środków Ministerstwa Finansów.

5. OSIAGNIĘCIE NAUKOWE (o którym mowa w art.16. ust. 2. ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytułach w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.))

5.1. Tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego

Jako osiągnięcie naukowe podlegające ocenie w procedurze habilitacyjnej wskazuję cykl publikacji pt.:

RÓWNOWAŻNOŚĆ MODELI EKONOMICZNYCH Z CZASEM CIĄGŁYM I DYSKRETNYM

Cel pracy:

Celem pracy jest określenie warunków i możliwości zastosowania równoważności układów dynamicznych ciągłych i dyskretnych w modelach ekonomicznych.

Główna hipoteza badawcza:

Istnieje możliwość określenia i wykazania warunków równoważności układów dynamicznych z czasem ciągłym i dyskretnym dla modeli ekonomicznych.

5.2. Skład jednotematycznego cyklu publikacji wskazanego jako osiągnięcie naukowe będące znaczącym wkładem w rozwój dyscypliny naukowej ekonomia

Jednotematyczny cykl publikacji „Równoważność modeli ekonomicznych z czasem ciągłym i dyskretnym”, stanowiący osiągnięcie wynikające z art. 16. ust. 2. Ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz.U. 2003. Nr 65, poz. 595 ze zm.) i będący znaczącym wkładem **dr Małgorzaty Guzowskiej** w rozwój nauk ekonomicznych w dyscyplinie **ekonomia**, obejmuje **zestaw 9** najważniejszych publikacji z obszaru problematyki równoważności modeli ekonomii matematycznej z czasem ciągłym i dyskretnym, które zostały pogrupowane według prezentowanej w nich problematyki:

1. Zastosowanie niestandardowych metod dyskretyzacji:

- A1. M. Guzowska** (2008): *Non-standard method of discretization on the example of Haavelmo Growth Cycle Model*, Folia Oeconomica Stetinensia, 7 (1), s. 45-55.
- A2. M. Guzowska** (2009): *Non-standard method of discretization on the example of Goodwin's Growth Cycle Model*, Polish Journal of Environmental Studies, 18 (5B), s. 100-104.
- A3. M. Guzowska** (2011): *Dynamiczne własności dyskretnej wersji modelu wzrostu Goodwina*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, nr 211, s. 125-136.

A4. M. Guzowska, E. Michetti (2018): *Local and global dynamics of Ramsey model: From continuous to discrete time*, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science: Vol 28, No 5, doi: 10.1063/1.5024337, s. 1-29.

2. Budowa modelu dyskretnego od podstaw:

A5. M. Guzowska, R. Luis, S. Elaydi (2011): *Bifurcation and invariant manifolds of the logistic competition model*, Journal of Difference Equation and Application, Volume 17, Issue 12, s. 1851-1872.

A6. M. Guzowska (2011): *Bifurcation, Chaos and Attractors in Logistic Competition Model*, Folia Oeconomica Stetinensia, Volume 10, Number 2, s. 7-18.

3. Zastosowanie rachunku na skalach czasowych:

A7. M. Guzowska, A.B. Malinowska (2015): *Wykorzystanie rachunku na skalach czasowych do opisu i analizy zjawisk ekonomicznych*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania nr 42, T.1, Metody ilościowe w ekonomii, s. 47-59.

A8. M. Guzowska, A. B. Malinowska, M.R.S. Ammi (2015): *Calculus of variation on time scales: Application to economic models*, Advances in Difference Equations 2015, 203 (doi:10.1186/s13662-015-0537-0), s.1-15, ISSN: 1687-1839.

4. Dyskretyzacja stochastycznych równań różniczkowych:

A9. M. Guzowska, J.A.D. Appleby, C. Kelly, A. Rodkina (2010): *Preserving positivity in solutions of discretised stochastic differential equations*, Applied Mathematics and Computation 217, s. 763-774.

5.3. Uzasadnienie wyboru obszaru cyklu publikacji

Problem równoważności układów dynamicznych w czasie ciągłym i dyskretnym, jak też rola czasu w ekonomii od wielu lat jest przedmiotem badań naukowych (Chiarella 2012, Elaydi 2003, Gandolfo 1997, Hozer, Zawadzki 1990, Lorenz 1989, Palczar 2003, Sharkovsky, Maistrenko i Romanenko 2012). Poprawa sprawności obliczeniowej oraz rozwój technik symulacyjnych spowodowały, że coraz częściej wykorzystuje się teoretyczne modele ekonomii matematycznej opisane za pomocą układów dynamicznych nie tylko do opisu zjawisk i zależności ekonomicznych, ale także pod kątem ich aplikacyjności (Armonk, Sharpe Boldrin i Montrucchio 1986, Benhabib i Day 1981, Benhabib i Day 1992, Benhabib i Laroque 1988, Blatt 1983, Boldrin i inni 2001, Bullard i Butler 1993, Colombo i Weinrich 2003, Hommes 1997, Dana i Montrucchio 1986, Farmer 1986, Gabish 1984, Grandmont, i Malgrange 1986, Nijkamp 1987). Budując model dynamiczny mamy możliwość wyboru, gdyż można

sformułować go w kategoriach ciągłych (najczęściej są to równania różniczkowe) lub okresowych – dyskretnych (równania różnicowe).

W przypadku modeli jednorównaniowych ze względu na wygodę matematyczną łatwiej jest operować postacią ciągłą modelu. Aparat matematyczny do analizy równań różniczkowych pozwala często szybko i w prosty sposób znaleźć rozwiązanie. Często także różnica między tymi ujęciami jest nieznaczna, przynajmniej w przypadku równań liniowych. Jednak w przypadku nieliniowych równań różniczkowych, bądź układów równań różniczkowych, tylko nieliczne z nich udaje się rozwiązać w sposób jawny. W teorii ekonomii większość modeli ekonomii matematycznej, opisujących zależności w makro, jak i mikroskali w czasie, z punktu widzenia historycznego, wykorzystuje do ich opisu równania różniczkowe, jak też układy tego typu równań. Jako przykład można tu podać autorów takich jak: Solow (1956), Swan (1956), Haavelmo (1954), Ramsey (1928) czy Goodwin (1951). Jednak z punktu widzenia zastosowania teorii ekonomii, większe znaczenie mają modele opisane równaniami różnicowymi, czyli te z czasem dyskretnym, chociażby z tego względu, że jednostki gospodarcze myślą i planują w kategoriach okresowych, w związku z czym dane empiryczne mają zazwyczaj postać okresową.

W momencie próby wykorzystania klasycznych modeli ekonomii matematycznej, często konieczne jest przejście do dyskretnych ich postaci, czyli równań różnicowych. Dyskretyzując modele, trzeba zwrócić szczególną uwagę na sposób dokonania przejścia od zmiennych ciągłych do zmiennych dyskretnych, a także mieć świadomość tego, że rozwiązanie i dynamika nowego modelu nie musi być tożsama z rozwiązaniem i dynamiką równania w czasie ciągłym. Okazuje się, że mimo wielu standardowych technik numerycznych (Judd 1998, Kocak 1989, Stuart i Humphries 1998), oraz stosowania gotowego oprogramowania, nie zawsze nowo otrzymane modele dyskretnie zachowują cechy modelu, które obserwowane są w czasie ciągłym. Co więcej, po publikacji May (1974), pojawiło się wiele dyskretnych wersji klasycznych modeli ekonomicznych, z których znaczna większość to modele klasyczne, zapisane za pomocą równań różnicowych poprzez zastosowanie prostej metody dyskretyzacji Eulera. Większość powstałych w ten sposób modeli, reprezentuje nie tylko zgoła odmienną dynamikę od modeli ciągłych, na których je wzorowano, ale także ich własności ekonomiczne są zgoła odmienne (patrz: Sordi 1996). Przykładami takich modeli są: proponowana przez R. Day (1982) dyskretna wersja modelu Solow'a (1956), proponowana przez Stutzer'a (1980) dyskretna wersja modelu Haavelmo (1954), proponowana przez Pohjola (1981) dyskretna wersja modelu Goodwin'a (1967). Nusse oraz Hommes (1990) zaproponowali nową wersję modelu Samuelson'a (1939). Pojawiło się też wiele innych propozycji, które krytycznej ocenie zostały poddane w pracach Sereny Sordi (1993, 1996).

Po okresie „fascynacji” powstałymi w modelach dyskretnych zachowaniami chaotycznymi, w dziedzinach takich jak: biologia czy nauki techniczne, zaczęto poszukiwać metod i podejść, które można zastosować do dyskretyzacji modeli zachowując ich własności teoretyczne, jak i dynamiczne. W dziedzinach tych powstały nowe, niestandardowe metody dyskretyzacji, takie jak metoda Kahana (1993), metoda Mickensa (1994, 2000), czy zmodyfikowana metoda Mickensa zaproponowana przez Kwesi wraz z autorami (2018), których zastosowanie pozwala na uzyskanie nowych modeli dyskretnych, o własnościach dynamicznych równoważnych, bądź bliskich pod względem dynamiki, modelom ciągłym, na podstawie których je utworzono (Al-Kahby, Dannan i Elaydi 2000, Mickens 2003, Roeger 2004).

Kolejne podejście to tworzenie nowych modeli dyskretnych „od podstaw”. Zastosowanie tego podejścia gwarantuje, że własności dynamiczne nowego modelu będą odpowiadać

dynamice jego ciągłego pierwowzoru, jako przykład można podać tu model Beverton-Holt (2012), który własnościami dynamicznymi odpowiada równaniu logistycznemu w czasie ciągłym.

Prowadząc pogłębione studia literaturowe, dotyczące własności dynamicznych modeli ekonomii matematycznej, jak też problemu równoważności modeli w czasie ciągłym i dyskretnym, możemy wnioskować, że w przypadku standardowych metod dyskretyzacji, wzrosła wiedza na ich temat, jak również ich zastosowania w naukach ekonomicznych, jest dość szerokie (Chiarella 2012, Day i Shafer 1985, Day 1983, Deneckere i Pelican 1986, Gandolfo 1997, Hahn 1992, Lorenz 1989, Sharkovsky, Maistrenko i Romanenko 1993, Mosekilde 1996, Prokhorov 2008, Saari 1994, Saari i Williams 1986, Tempczyk 1995, Zawadzki 1996 i wielu innych). Natomiast w przypadku niestandardowych metod dyskretyzacji są one dość szeroko stosowane w naukach przyrodniczych takich jak biologia czy w naukach technicznych (Al-Kahby, Danna i Elaydi 2000, Elaydi 2003, Liu i Elaydi 2001, Mickens 2003, Roeger 2004).

Prezentowane w ramach cyklu publikacji wyniki przeprowadzonych analiz, mają charakter nowatorski i wpisują się w główny nurt tego typu badań w świecie. Ich oryginalny wkład do dorobku zastosowań matematyki w ekonomii polega na wykorzystaniu najnowszych metod dyskretyzacji dla modeli ekonomii matematycznej z czasem ciągłym. Wyniki tych badań mogą mieć znaczący wpływ na rozwój teorii ekonomii w ujęciu matematycznym, mogą również zwiększyć aplikacyjność modeli ekonomii matematycznej.

5.4. Kluczowe osiągnięcia w ramach cyklu publikacji

Wprowadzenie: Problem równoważności modeli ekonomicznych z czasem ciągłym i dyskretnym

Własności dynamiczne modeli ekonomii matematycznej w czasie dyskretnym, takie jak przedstawiony model Stutzer (1980), będący dyskretną wersją modelu Haavelmo (1954), pozwoliły na postawienie pytania: *czy pojawiające się w wersji dyskretnej modelu zachowania chaotyczne są wynikiem błędnej dyskretyzacji, czy też istnieją w ich ciągłym pierwowzorze?*

Aby zilustrować postawiony problem, jako przykład posłużymy się wspomnianym wyżej modelem Haavelmo oraz jego dyskretną wersją proponowaną przez Stutzer (1980). Stutzer rozważył nieliniowy model cyklu wzrostu, przedstawiony wcześniej dla czasu ciągłego przez Haavelmo (1954), z:

$$Y = KN^a, \quad K > 0, \quad 0 < a < 1$$

jako funkcją produkcji, ze stałym zapasem kapitału. Dodatkowo założył, że stopa wzrostu zatrudnienia opisana jest jako:

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{Y}, \quad \alpha, \beta > 0$$

czyli stopa wzrostu wzrasta, gdy wzrasta produkt (dochód) na głowę.

W modelu L, oznacza nakłady pracy żywej, Y jest wielkością produkcji, natomiast $\alpha, \beta > 0$, $0 < a < 1$ oraz K, czyli wielkość zaangażowanego w proces produkcji kapitału, są parametrami.

Łącząc oba równania otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$\dot{L} = \alpha L - \frac{\beta}{K} L^{2-a}$$

opisujące dynamikę nakładów pracy. Jest to równanie typu Bernoulliego. Nietrudno sprawdzić, że ma ona dwa rozwiązania stacjonarne:

$$L_1^* = 0 \text{ – niestabilne,} \quad L_2^* = \left(\frac{\alpha K}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-a}} \text{ – asymptotycznie stabilne.}$$

W zaproponowanej przez Stutzer'a wersji dyskretnej modelu, w celu dyskretyzacji modelu wykorzystano prostą dyskretyzację Eulera z krokiem $h=1$, czyli zastępując operator różniczkowy przez skończoną różnicę (tzn. przyjęto $\dot{L} = L_{t+1} - L_t$). W wyniku takiego podstawienia otrzymujemy nieliniowe równanie różnicowe rzędu pierwszego, opisujące zachowanie się w czasie zatrudnienia:

$$L_{t+1} = (1 + \alpha)L_t - \beta \frac{L_t^{2-a}}{K},$$

które po liniowym podstawieniu: $L_t = \left(\frac{K(1 + \alpha)}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-a}} x_t$,

przyjmuje postać:

$$x_{t+1} = (1 + \alpha)x_t(1 - x_t^{1-a}), \quad \text{gdzie } x_t = L_t \left(\frac{K(1 + \alpha)}{\beta} \right)^{-\frac{1}{1-a}}.$$

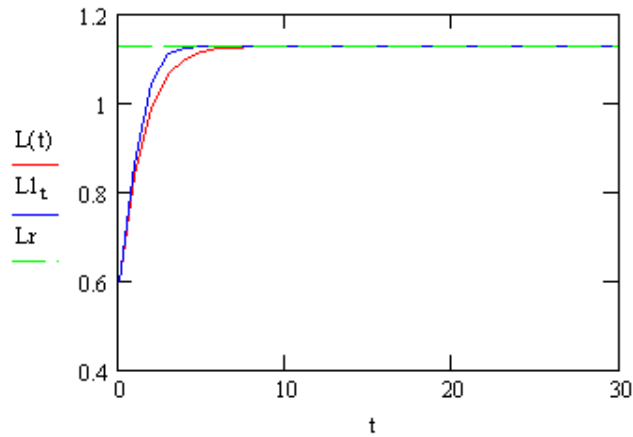
Nietrudno sprawdzić, że nowy dyskretny model ma dwa rozwiązania stacjonarne:

$$c_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad c_1 = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{1-a}}.$$

Jak wykazano w pracy Guzowskiej (2003), c_1 jest stabilnym punktem równowagi gdy $\alpha \in \left(0, \frac{2}{1-a} \right]$, przy czym dla $\alpha \in \left(0, \frac{1}{1-a} \right]$ jest to asymptotycznie stabilny punkt równowagi, natomiast dla $\alpha \in \left(\frac{1}{1-a}, \frac{2}{1-a} \right]$ zbieżność ta przyjmuje postać oscylacyjną.

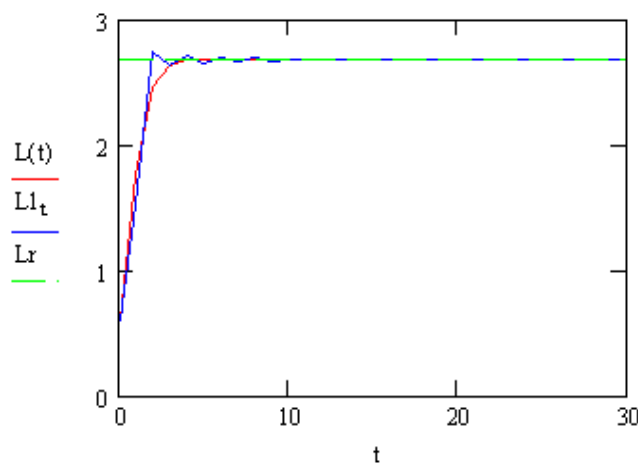
Przyjmując za parametr wartość $a = 0.2$, natomiast za wartość początkową $L_0 = 0.6$, można wykazać dla modelu dyskretnego przedział zbieżności ($\alpha \in (0, 2.5]$), a także to, że model jest chaotyczny, w sensie twierdzenia Li-Yorka'a (patrz: Li, York 1975), dla pewnych wartości parametrów $\alpha \in (2.5, \approx 3.37)$. Można, więc zaobserwować zachowanie, którego nie ma w przypadku oryginalnego modelu proponowanego przez Haavelmo. Z rozważań tych jasno wynika, że zachowanie modelu w czasie ciągłym i dyskretnym jest bardzo różne. Aby zobaczyć jak różne są zachowania obu modeli, posłużymy się prostą symulacją numeryczną przedstawiającą dla przyjętych powyżej wielkości warunków początkowych ($L_0 = 0.6$) oraz

wartości parametrów ($a = 0.2, \frac{\beta}{K} = 1$), zachowanie modelu ciągłego ($L(t)$) oraz modelu dyskretnego ($L1_t$) ze względu na zmianę parametru α .



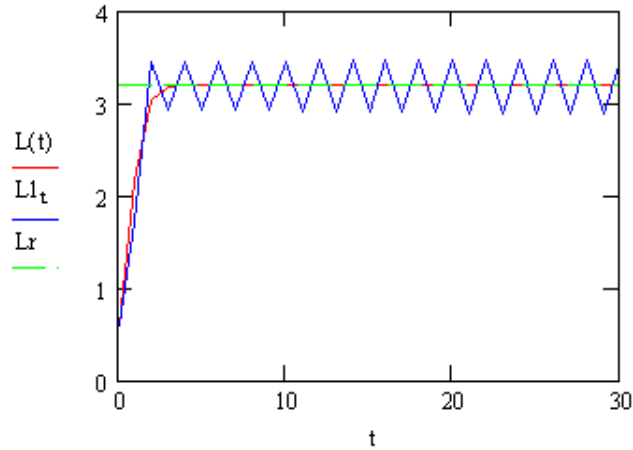
Rysunek 1. Zachowanie ścieżki czasowej modelu ciągłego ($L(t)$) i dyskretnego ($L1_t$) dla parametru $\alpha = 1.1$

Źródło: obliczenia i opracowanie własne.



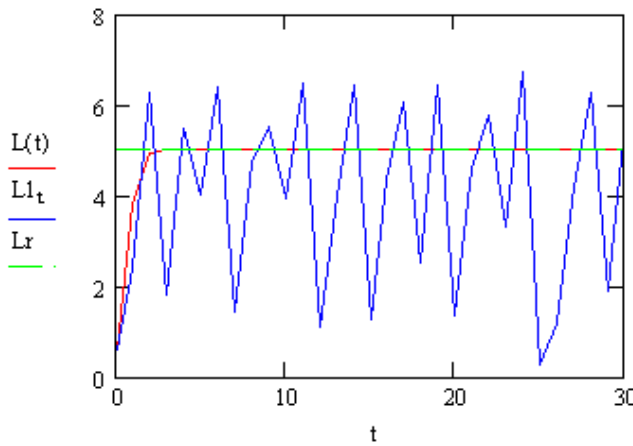
Rysunek 2. Zachowanie ścieżki czasowej modelu ciągłego ($L(t)$) i dyskretnego ($L1_t$) dla parametru $\alpha = 2.2$

Źródło: obliczenia i opracowanie własne.



Rysunek 3. Zachowanie ścieżki czasowej modelu ciągłego ($L(t)$) i dyskretnego ($L1_t$) dla parametru $\alpha = 2.54$

Źródło: obliczenia i opracowanie własne.



Rysunek 4. Zachowanie ścieżki czasowej modelu ciągłego ($L(t)$) i dyskretnego ($L1_t$) dla parametru $\alpha = 3.64$

Źródło: obliczenia i opracowanie własne.

Powyższa analiza dynamiki modelu oraz przeprowadzona symulacja potwierdzają, że co prawda dynamika modelu zaproponowana przez Stutzer'a, jest z punktu widzenia teorii chaosu, bardzo interesująca, ale odbiega całkowicie od założeń modelu zaproponowanego przez Haavelmo.

Analogicznie, w prosty sposób można wykazać różnice pomiędzy ciągłą a dyskretną wersją innych modeli ekonomii matematycznej, przykładowo: proponowana przez R. Day (1982) dyskretna wersja modelu Solowa (1956), proponowana przez Pohjola (1978) dyskretna wersja modelu Goodwina (1951), czy też zaproponowana przez Nusse oraz Hommes (1990) nowa wersja modelu Samuelsona (1939).

1. Zastosowanie niestandardowych metod dyskretyzacji:

A1. M. Guzowska (2008): *Non-standard method of discretization on the example of Haavelmo Growth Cycle Model*, Folia Oeconomica Stetinensia, 7 (1), s. 45-55.

W pracy **A1.** dla omawianego wcześniej modelu wzrostu Haavelmo, przedstawiono i zastosowano, niestandardową metodę dyskretyzacji Kahana (1993). Analizę zbieżności przeprowadzono dla dwóch modeli w wersji dyskretnej uzyskanych poprzez zastosowanie metody Eulera ze zmiennym krokiem, oraz przy wykorzystaniu metody Kahana, także ze zmiennym krokiem dyskretyzacji. W Twierdzeniu 1. oraz Twierdzeniu 2. pracy określono warunki zbieżności obu modeli dyskretnych w zależności od przyjętego kroku dyskretyzacji. Uzyskane w Twierdzeniach warunki zbieżności pokazały, że w przypadku zastosowania metody Eulera, nawet przy doborze bardzo małego kroku dyskretyzacji nigdy nie następuje zbieżność do poziomu równowagi. W przypadku zastosowania metody Kahana, zbieżność do poziomu równowagi następuje przy odpowiednio małej wielkości kroku h . Zaproponowane w pracy podejście, czyli zastosowanie niestandardowej metody Kahana pozwoliło na otrzymanie dyskretnej wersji modelu Haavelmo, która nie zmienia lokalnych własności dynamicznych modelu ciągłego, jednak nie pozwala na konstrukcję dyskretnej wersji modelu bez pominięcia kroku dyskretyzacji.

A2. M. Guzowska (2009): *Non-standard method of discretization on the example of Goodwin's Growth Cycle Model*, Polish Journal of Environmental Studies, 18 (5B), s. 100-104.

Model cykli wzrostu Goodwina (Goodwin 1967, Goodwin i Schumpeter 1991) jest kamieniem milowym w przypadku nieliniowych układów dynamicznych w ekonomii, stąd wiele jego modyfikacji i ulepszeń (Desai 1973, Gandolfo 1997, Goodwin 1991, Wolfstetter 1982).

W pracy **A2.** zastosowano dyskretyzację Kahana dla modelu wzrostu Goodwina, opisanego układem nieliniowych równań różniczkowych. Podobnie jak w pracy **A1.** analizę dynamiki przeprowadzono, w celu porównania, dla dwóch modeli w wersji dyskretnej, uzyskanych poprzez zastosowanie metody Eulera ze zmiennym krokiem oraz przy wykorzystaniu niestandardowej metody dyskretyzacji Kahana, także ze zmiennym krokiem dyskretyzacji. W Twierdzeniach 1. oraz 2. Pracy, przedstawiono warunki zbieżności obu modeli dyskretnych, w zależności od przyjętego kroku dyskretyzacji. Uzyskane w Twierdzeniach warunki zbieżności pokazały, że w przypadku zastosowania metody Eulera, nawet przy doborze bardzo małego kroku dyskretyzacji, nigdy nie następuje zbieżność do poziomu równowagi. W przypadku zastosowania metody Kahana, zbieżność do poziomu równowagi następuje przy odpowiednio małej wielkości kroku h . Zaproponowane w pracy podejście, czyli zastosowanie niestandardowej metody Kahana pozwoliło na otrzymanie dyskretnej wersji modelu wzrostu Goodwina, która nie zmienia lokalnych własności dynamicznych modelu ciągłego, jednak nie pozwala na konstrukcję dyskretnej wersji modelu bez pominięcia kroku dyskretyzacji.

A3. M. Guzowska (2011): *Dynamiczne własności dyskretnej wersji modelu wzrostu Goodwina*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, nr 211, s. 125-136.

W pracy **A3.** została omówiona i zastosowana metoda różnic skończonych zaproponowana przez Ronalda Mickensa (Mickens 1994, Mickens 2003). W pracy **A3.**

podejście Mickensa wykorzystano do dyskretyzacji modelu Goodwina. Metoda ta, mimo pewnych ograniczeń i bardzo eksperymentalnego podejścia w oparciu o analizę portretów fazowych, jest z powodzeniem stosowana w obszarze nauk technicznych i przyrodniczych (Al-Kahby, Dannan i Elaydi 2000, Liu i Elaydi 2001, Mickens 1994, Mickens 2000, Mickens 2003).

Poprzez wykorzystanie dyskretyzacji Mickensa, otrzymano dyskretną wersję Modelu Goodwina (układ równań różnicowych), która reprezentuje taką samą dynamikę lokalną, co udowodniono w pracy, jak jej ciągły pierwowzór. Szeroki wybór przekształceń jaki można użyć wykorzystując dyskretyzację Mickensa, pozwolił na skonstruowanie modelu, który ma te same własności co oryginalny układ równań różniczkowych, bez konieczności wprowadzenia kroku h . Pod kątem dynamiki lokalnej oba modele można uznać za równoważne. Co więcej, własności modelu dyskretnego wynikające z charakterystyk wartości własnych macierzy Jacobiego tego układu, dowodzą równoważności zachowań dynamicznych obu modeli ciągłego i dyskretnego także globalnie.

A4. M. Guzowska, E. Michetti (2018): *Local and global dynamics of Ramsey model: From continuous to discrete time*, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, Vol 28, No 5, doi: 10.1063/1.5024337, s. 1-29.

Problem dyskretyzacji modeli dynamicznej optymalizacji (rachunek wariacyjny), do których należy model Ramseya, jest tematem szeroko omawianym w literaturze (przykładowo: Dorfman 1969, Brock i Scheinkman, 1976, Chow 1973). W pracy **A4.** przeprowadzono dyskretyzację modelu Ramseya, wykorzystując dyskretyzację mieszaną proponowaną dla układu równań różniczkowych, do których sprowadza się model Ramseya. Dodatkowo, w pracy **A4.** zaprezentowane zostały kroki postępowania przy dyskretyzacji modeli z problemem dynamicznej optymalizacji. W pracy, przeprowadzono analizę dynamiki obu modeli: ciągłego i dyskretnego, zarówno na poziomie lokalnym, jak i globalnym. W wyniku zastosowania dyskretyzacji mieszanej otrzymano model dyskretny o identycznej jak w przypadku modelu ciągłego dynamice w przypadku analizy lokalnej. Analiza własności globalnych obu modeli przeprowadzona, przy użyciu eksperymentów numerycznych pokazała, że dla obu modeli ich rozmaitości stabilne mają ten sam kształt, istnieje jednak mały obszar pomiędzy nimi, gdzie oba systemy generują różne jakościowe dynamiki długookresowe. W pracy, zaproponowano numeryczny sposób pomiaru zachowania punktów z takiego regionu.

2. Budowa modelu od podstaw:

Pamiętając o tym, że dzięki zastosowaniu metod dyskredytacyjnych, nie zawsze otrzymuje się model dyskretny o własnościach dynamicznych odpowiadających ciągłemu pierwowzorowi, kolejnym podejściem do otrzymania dyskretnego modelu jest budowa modelu od podstaw z wykorzystaniem równań różnicowych. W wyniku takiego podejścia można otrzymać dyskretną wersję modelu odpowiadającą pod względem dynamicznym swojemu pierwowzorowi w czasie ciągłym. Za sztandarowy przykład takiego podejścia, uważa się model Beverton-Holt (1975), który jest dyskretną wersją modelu logistycznego, mającego szerokie zastosowanie w biologii, ekonomii i naukach technicznych. Wpisując się w powyższy nurt, zaprezentowany w pracy **A5.** model jest propozycją nowego modelu konkurencji typu logistycznego, opisanego przez układ nieliniowych równań różnicowych.

A5. M. Guzowska, R. Luis, S. Elaydi (2011): *Bifurcation and invariant manifolds of the logistic competition model*, Journal of Difference Equation and Application, Volume 17, Issue 12, s. 1851-1872.

W literaturze można znaleźć wiele przykładów zastosowań modelu konkurencji w odniesieniu do opisu i analizy zjawisk w ekonomii (Gomis-Porqueras i Haro 2003, Grandmont 1985, Jullien 1988, Lopez-Ruiz i Fournier-Prunaret 2004, Rand 1978, Sorger 1995, Succi, Lee i Alexander 1997, Zengru i Sanglier 1996) czy też biologii (Cushing i inni 2004, Franke i Yacubu 1991, Hassell i Comins 1976). W przypadku modeli ekonomicznych modele konkurencji stosowane są zarówno do opisu dwuwymiarowych zależności pomiędzy popytem i podażą (Zengru i Sanglier 1996), porównania dwóch różnych polityk w przypadku modelu równowagi ogólnej polityki pieniężnej (Gomis-Porqueras i Haro 2003), jak i do analizy konkurencji ze względu na położenie geograficzne (Succi, Lee i Alexander 1997). Ze względu na częste zastosowanie klasycznego modelu logistycznego, w czasie ciągłym, do opisu zjawisk w ekonomii i biologii (Gandolfo 1997, May 1994) za cel w pracy **A5.** przyjęto ***budowę dyskretnego modelu konkurencji typu logistycznego, opisującego zarówno konkurencję wewnętrzną jak i zewnętrzną, mogącego mieć zastosowanie zarówno w ekonomii jak i biologii***, gdzie często w przypadku jednowymiarowym opisujemy rozwój pojedynczej populacji za pomocą ciągłego równania logistycznego.

Dodatkowo przyjętym założeniem, poza aplikacyjnością modelu była ***możliwość analizy dynamicznych właściwości modelu, zarówno w ujęciu lokalnym, jak i globalnym***. Znajomość globalnych własności systemu deterministycznego daje bowiem możliwość kontroli zachowań systemu i wybierania optymalnej ścieżki poprzez wybór odpowiednich wielkości parametrów (Gomis-Porqueras i Haro 2003).

Za główne osiągnięcia przedstawione w pracy należy zatem uznać: budowę dyskretnego modelu konkurencji typu logistycznego. Dodatkowymi osiągnięciami w pracy są: przeprowadzenie analizy własności dynamicznych wszystkich uzyskanych w modelu punktów równowagi, zarówno pod względem dynamiki lokalnej, jak też dynamiki globalnej, przy wykorzystaniu teorii niezmienniczych rozmaitości oraz twierdzenia o rozmaitościach centralnych (Carr 2012, Elaydi 2007, Karydas i Schinas 1992, Kelley 1967, Kuznetsov 2013), określenie stabilnych i niestabilnych rozmaitości. Przeprowadzona w pracy analiza własności dynamicznych dla wszystkich punktów stacjonarnych modelu, pozwoliła także na określenie scenariuszy bifurkacyjnych modelu ze względu na dwa parametry decyzyjne, wraz z określeniem obszarów poszczególnych typów zachowań dynamicznych, takich jak: asymptotyczna zbieżność do punktu równowagi, bifurkacje podwojenia okresu (ang. period doubling bifurcation), bifurkacje siodło-węzeł (ang. saddle node bifurcation), orbity 2 okresowe, orbity 4 okresowe czy w końcu niestabilność.

A6. M. Guzowska (2011): *Bifurcation, Chaos and Attractors in Logistic Competition Model*, Folia Oeconomica Stetinensia, Volume 10, Number 2, s. 7-18.

Celem pracy **A6.** była pogłębiona analiza własności dynamicznych, bifurkacyjnych zaproponowanego w pracy **A5.** modelu konkurencji typu logistycznego. Za główne osiągnięcia w pracy należy uznać przedstawienie diagramu bifurkacyjnego modelu obejmującego orbity 35 okresowe. Analiza ta pozwoliła na opracowanie i przedstawienie dwuwymiarowego wykładnika Lyapunowa dla analizowanego modelu konkurencji typu logistycznego. Przeprowadzona analiza pozwoliła także na wykrycie podstawowych formacji atraktorów, jakie zawiera proponowany model.

3. Zastosowanie rachunku na skalach czasowych

- A7.** M. Guzowska, A.B. Malinowska (2015): *Wykorzystanie rachunku na skalach czasowych do opisu i analizy zjawisk ekonomicznych*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania nr 42, T.1, Metody ilościowe w ekonomii, s. 47-59.
- A8.** M. Guzowska, A. B. Malinowska, M.R.S. Ammi (2015): *Calculus of variation on time scales: Application to economic models*, Advances in Difference Equations 2015: 203 (doi:10.1186/s13662-015-0537-0), s. 1-15, ISSN: 1687-1839.

Rachunek różniczkowy i całkowy na skalach czasowych jest nową teorią matematyczną łączącą istniejące podejścia do modelowania matematycznego procesów dynamicznych za pomocą układów dynamicznych ciągłych lub dyskretnych – w ogólne ramy o nazwie układy dynamiczne na skalach czasowych. To bardziej ogólne podejście do modelowania dynamicznego, pozwala na rozważenie bardziej złożonych dziedzin czasu jak np.: dziedziny periodyczne $h\mathbb{Z}$, kwantowe q^{N_0} lub hybrydowe (ciągło-dyskretne).

Pojęcie skal czasowych zostało wprowadzone w 1988 roku przez niemieckiego matematyka S. Hilgera (1998), w jego rozprawie doktorskiej pisanej pod kierunkiem B. Aulbacha. Teoria skal czasowych była narzędziem, które umożliwiło unifikację wyników znanych dla ciągłych i dyskretnych układów dynamicznych (Aulbach i Hilger 1998). Podstawowe założenie wprowadzenia rachunku na skalach czasowych Hilger sprowadził do trzech etapów: unifikacja, rozwinięcie, dyskretyzacja. Z czasem zauważono, że teoria skal czasowych jest narzędziem, które umożliwia nie tylko unifikację wyników znanych dla ciągłych i dyskretnych układów dynamicznych (Aulbach i Hilger 1998), ale pozwala również na przeniesienie ich na dowolne skale niejednorodne.

Obecnie literatura dotycząca teorii skal czasowych jest bardzo bogata i zawiera interesujące zastosowania teorii i metod skal czasowych, np.: w ekonomii (Atici i McMahan 2009, Atici i Uysal 2008, Atici, Biles i Lebedinsky 2006, 2011), biologii (Bohner i Warth 2007, Bohner, Fan i Zhang 2007) lub fizyce (Bekker i inni 2010). Początki rachunku wariacyjnego na skalach czasowych to praca M. Bohnera (2004), w której problem wariacyjny został zapisany z użyciem delta pochodnej i delta całki. W kolejnych latach rachunek ten był rozwijany przez wielu autorów (np.: Malinowska i Torres 2011, Hilscher i Zeidan 2009).

Celem omawianych artykułów było **przedstawienie możliwości zastosowania w modelach ekonomicznych teorii rachunku wariacyjnego na skalach czasowych**. Nie tylko jako metody dyskretyzacji, ale także jako narzędzia pozwalającego na analizę klasycznych modeli ekonomii matematycznej w dowolnej skali czasu wykraczającej poza skalę ciągłą i dyskretną.

W omawianych pracach **A7.** oraz **A8.** zebrano i przedstawiono niezbędną teorię, definicje i twierdzenia z zakresu teorii skal czasowych, mogących mieć zastosowanie przy analizie wybranej grupy modeli ekonomii matematycznej. W przedstawionych pracach zostały poddane analizie trzy modele ekonomiczne „cake eating problem” czyli model wyboru w czasie, prosty model wyboru gospodarstwa domowego (**A8.**) oraz model prokrastynacji (**A7.**).

Przeprowadzone obliczenia i symulacje komputerowe pozwoliły na obserwację nowych, dotąd nie prezentowanych w literaturze przedmiotu, zachowań uzyskanych przy analizie modeli na skalach czasu innych niż ciągła (zbiór liczb rzeczywistych), czy dyskretna (liczby całkowite).

W przypadku modelu prokrastynacji (A7.) otrzymane wyniki potwierdziły nasze intuicyjne przypuszczenia, że poziom wykonywanej pracy jest wyższy, gdy wykonywana jest ona z przerwami, niż gdy wykonywana jest w sposób ciągły. Zastosowanie rachunku wariacyjnego na skalach czasowych pozwoliło nie tylko na obserwację znanego z teorii efektu odkładania pracy na później (zjawisko to jest widoczne na wszystkich skalach czasowych), ale też na zaobserwowanie różnic w poziomie wykonywanej pracy ze względu na częstotliwość jej wykonywania.

W pracy A8. przeprowadzono analizę dynamiki na wybranych skalach czasowych dla dwóch modeli: „cake eating problem” oraz prostego modelu gospodarstwa domowego. W przypadku „cake eating problem” analizę zachowań dynamicznych modelu przeprowadzono na czterech skalach czasowych $T_1 = \{0,1,2,3,\dots,60\}$, $T_2 = \{0,10,20,30,\dots,60\}$, $T_3 = \{1,2,4,8,16,38\}$ $T_4 = \{0,2,10,15,40,55\}$.

W przypadku skal czasowych $T_1 = \{0,1,2,3,\dots,60\}$ oraz $T_2 = \{0,10,20,30,\dots,60\}$ zachowanie konsumenta jest zgodne z zachowaniami, znanymi w klasycznej teorii ekonomii. Przeprowadzona analiza pokazuje, że ścieżki czasu konsumpcji mają takie same tendencje. Konsument je małe posiłki, gdy je częściej i duże, gdy posiłki są rzadko. Obserwację tę potwierdza także analiza procentowego udziału konsumpcji w czasie t w stosunku do pozostałych zasobów, która wykazuje się małą zmiennością w czasie.

W przypadku skali czasu $T_3 = \{1,2,4,8,16,38\}$, gdzie odległość w czasie do kolejnego momentu jedzenia oddala się coraz bardziej, możemy zobaczyć wzrost poziomu konsumpcji. Obserwuje się w tym przypadku, tendencję do „kumulowania” żywności, kiedy już wiadomo, że posiłek będzie coraz bardziej oddalony w czasie.

Dla skali czasu $T_4 = \{0,2,10,15,40,55\}$, w której częstotliwość otrzymywanych posiłków jest zmienna w czasie, efekt „kumulowania” wspomniany powyżej można zaobserwować już bardzo wyraźnie.

Kolejny model analizowany w pracy A8. to prosty model gospodarstwa domowego. Ze względu na budowę warunków ograniczających model, analizę jego dynamiki przeprowadzono na skali czasu, zbudowanej z trzech odrębnych skal. Rozwiązanie prostego modelu gospodarstwa domowego, dla przyjętych w pracy skal czasowych, pozwoliło na zilustrowanie zjawiska opisanego w literaturze ekonomicznej przez J. Parkera (1999) oraz M.D. Shapiro i J. Slemroda (1993), którzy zaobserwowali, że oczekiwane zmiany zwiększenia dochodów, powodują zwiększenie wydatków. W analizowanym modelu, przy przyjętych skalach czasowych, zjawisko to jest szczególnie widoczne w miesiącu drugim, szóstym i ósmym, gdzie zbliżający się termin kapitalizacji odsetek wpływa na wielkość podejmowanych pieniędzy, odbiegając znacznie od wielkości wynikających z założonej funkcji preferencji.

Poza wymienionymi osiągnięciami zawartymi w pracach A7. i A8., na szczególne podkreślenie zasługuje fakt, że są to pionierskie prace na gruncie nie tylko ekonomii, ale także analiz dynamiki modeli na skalach czasowych, które poza unifikacją modelu przedstawiają działanie modelu na innych skalach niż tylko ciągła i dyskretna.

4. Dyskretyzacja stochastycznych równań różniczkowych:

A9. M. Guzowska, J.A.D. Appleby, C. Kelly, A. Rodkina (2010): *Preserving positivity in solutions of discretised stochastic differential equations*, Applied Mathematics and Computation 217, s. 763-774.

Ostatnia, prezentowana w cyklu zbioru praca, wykracza poza ogólnie przyjęty obszar modeli ekonomii matematycznej. Jednak ze względu na rozważaną w niej problematykę dotyczącą dyskretyzacji stochastycznych równań różniczkowych, stanowi ona rozszerzenie omawianych wcześniej modeli na grupę modeli stochastycznych, mających szerokie zastosowanie w finansach (przykładowo: Ninomiya 2003, Sauer 2012, Wu, Mao i Chen 2008).

W pracy **A9.** podjęliśmy próbę przedstawienia propozycji modyfikacji dyskretyzacji Eulera-Maruyama (Kloeden i Platen 2013), tak aby jej zastosowanie do rozwiązania stochastycznego równia różniczkowego gwarantowało uzyskanie nieujemnych rozwiązań z jak największym prawdopodobieństwem. Z problemem tym, spotykamy się często przy zastosowaniach stochastycznych równań różniczkowych w matematyce finansowej, gdzie dodatniość rozwiązania ma ogromne znaczenie, chociażby w przypadku cen aktywów, które przyjmują tylko wartości nieujemne.

W pracy **A9.** do badań testowych wybrano standardowe równanie ruchu Browna spełniające liniowe różniczkowe równanie Ito:

$$\begin{aligned}dX(t) &= \lambda X(t)dt + \sigma X(t)dB(t), & t \geq 0, & (*) \\X(0) &= \zeta > 0,\end{aligned}$$

gdzie $\lambda, \sigma \in R$, B jest standardowym ruchem Browna, dodatkowo, prawie zawsze powyższy układ może być spełniony przez proces stochastyczny:

$$X(t) = \zeta e^{\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)}, \quad t \geq 0,$$

Dodatniość powyższego rozwiązania gwarantowana jest warunkiem:

$$P[X(t) > 0 \text{ dla wszystkich } t \geq 0] = 1.$$

Pytania badawcze jakie postawiono w pracy można przedstawić w następujący sposób:

- Czy jest możliwa dyskretyzacja układu (*) tak aby dyskretne rozwiązanie było nieujemne?
- Jeśli jest możliwy taki sposób dyskretyzacji, to czy może on generować dodatnie rozwiązania z dość dużym, z góry zadany, prawdopodobieństwem?
- Jeśli to możliwe, czy można wyznaczyć z góry, ile punktów iteracji jest potrzebnych, aby uzyskać nieujemne rozwiązania z zadany z góry prawdopodobieństwem?

Odpowiadając na zadane pytania badawcze, za najważniejsze osiągnięcia przedstawione w pracy **A9.** należy uznać badanie teoretycznych aspektów, jak i przeprowadzenie analizy numerycznej, związanych z dyskretyzacją stochastycznych równań różniczkowych.

W ramach przeprowadzonej analizy teoretycznej wykazano, że możliwe jest przeprowadzenie dyskretyzacji stochastycznego równania różniczkowego, tak, aby procesy będące jego rozwiązaniem przyjmowały nieujemne wartości. W pracy wykazaliśmy także silne i słabe strony tego typu dyskretyzacji. Przeprowadzona analiza teoretyczna pozwoliła także na budowę

algorytmu, dzięki któremu możliwe jest określenie minimalnej liczby iteracji potrzebnych do uzyskania nieujemnych procesów przy zadanej wielkości prawdopodobieństwa.

Podsumowanie

W ujęciu syntetycznym, wkład jednotematycznego cyklu publikacji: **Równoważność modeli ekonomicznych z czasem ciągłym i dyskretnym** w rozwój **nauk ekonomicznych** w dyscyplinie **ekonomia** można przedstawić w następujący sposób:

- [1] Wykorzystanie najnowszych metod i technik analizy układów dynamicznych w odniesieniu do modeli ekonomii matematycznej.
- [2] Określenie prawidłowości dotyczących typów bifurkacji typowych dla modeli ekonomii matematycznej, opisanych nieliniowymi równaniami różnicowymi z dwoma parametrami.
- [3] Przeprowadzenie analizy problemu równoważności modeli ekonomicznych w czasie ciągłym i dyskretnym dla wybranych modeli ekonomicznych.
- [4] Przeprowadzenie przeglądu metod dyskretyzacji, zarówno klasycznych jak i niestandardowych, mogących mieć zastosowanie do modeli ekonomii matematycznej, jak i modeli matematyki finansowej.
- [5] Zaprezentowanie ograniczeń i słabych stron tradycyjnych metod dyskretyzacji w przypadku stosowania ich do wybranych grup modeli ekonomii matematycznej.
- [6] Zastosowanie wybranych niestandardowych metod dyskretyzacji do modeli ekonomii matematycznej.
- [7] Zaproponowanie nowej dyskretnej wersji modelu Goodwina poprzez zastosowanie dyskretyzacji Mickensa.
- [8] Przeprowadzenie dowodu równoważności dynamiki lokalnej dla nowego dyskretnego modelu Goodwina.
- [9] Zaproponowanie nowej dyskretnej wersji modelu Ramseya poprzez zastosowanie dyskretyzacji mieszanej.
- [10] Przeprowadzenie dowodu równoważności dynamiki lokalnej i globalnej dla nowego dyskretnego modelu Ramseya.
- [11] Zbudowanie nowego modelu konkurencji typu logistycznego.
- [12] Przeprowadzenie analizy własności dynamicznych nowego modelu konkurencji typu logistycznego.
- [13] Identyfikacja występujących rodzajów bifurkacji i atraktorów w modelu konkurencji typu logistycznego.
- [14] Zastosowanie do analizy modeli ekonomicznych rachunku na skalach czasowych.
- [15] Zebranie i przedstawienie definicji i twierdzeń z zakresu teorii na skalach czasowych niezbędnych do analizy modeli ekonomicznych.
- [16] Wykazanie istnienia nowych rodzajów zachowań dynamicznych dla modeli wykorzystujących mieszane skale czasowe.
- [17] Opracowanie zmodyfikowanej metody Eulera-Maruyama, pozwalającej na dyskretyzację stochastycznych równań różniczkowych, przy założeniu otrzymania nieujemnych procesów rozwiązania.
- [18] Opracowanie algorytmu dyskretyzacji stochastycznych równań różniczkowych, gwarantujących nieujemność procesów rozwiązania wraz z określeniem minimalnej liczby iteracji, niezbędnej do uzyskania takich procesów przy zadanej wielkości prawdopodobieństwa.

Dokładny opis mojego wkładu w powstanie wskazanych publikacji znajduje się w załączniku 3. Oświadczenia współautorów o ich wkładzie zawiera załącznik 5.

Literatura:

1. Al-Kahby, H., Dannan, F., & Elaydi, S. (2000). Non-standard discretization methods for some biological models. *Applications of nonstandard finite difference schemes*, World Scientific, Singapore, 155-180.
2. Atici, F. M., & McMahan, C. S. (2009). A comparison in the theory of calculus of variations on time scales with an application to the Ramsey model. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, 9(1), 1-10.
3. Atici, F. M., & Uysal, F. (2008). A production–inventory model of HMMS on time scales. *Applied Mathematics Letters*, 21(3), 236-243.
4. Atici, F. M., Biles, D. C., & Lebedinsky, A. (2006). An application of time scales to economics. *Mathematical and Computer Modelling*, 43(7-8), 718-726.
5. Atici, F. M., Biles, D. C., & Lebedinsky, A. (2011). A utility maximisation problem on multiple time scales. *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, 3(1-2), 38-47.
6. Aulbach, B., & Hilger, S. (1990). A unified approach to continuous and discrete dynamics. Qualitative Theory of Differential Equations. In *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* (Vol. 53, pp. 37-56). Amsterdam: North-Holland.
7. Bekker, M. B., Bohner, M. J., Herega, A. N., & Voulov, H. (2010). Spectral analysis of a q-difference operator. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(14), 145207.
8. Benhabib, J., & Day, R. (1982). A characterization of erratic dynamics in the overlapping generations model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 4, 37-55.
9. Benhabib, J., & Day, R. H. (1981). Rational choice and erratic behaviour. *The Review of Economic Studies*, 48(3), 459-471.
10. Benhabib, J., & Laroque, G. (1988). On competitive cycles in productive economy. *Journal of Economic Theory*, 45, 145-170.
11. Beverton, R. J., & Holt, S. J. (2012). *On the dynamics of exploited fish populations* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.
12. Blatt, J. M. (1983). *Dynamic economic systems: a post-Keynesian approach*. ME Sharpe Inc.
13. Bohner, M. (2004). Calculus of variations on time scales. *Dynam. Systems Appl*, 13(3-4), 339-349.
14. Bohner, M., & Warth, H. (2007). The Beverton–Holt dynamic equation. *Applicable Analysis*, 86(8), 1007-1015.
15. Bohner, M., Fan, M., & Zhang, J. (2006). Periodicity of scalar dynamic equations on time scales. *J. Math. Anal. Appl*, 7, 1193-1204.
16. Boldrin, M., Nishimura, K., Shigoka, T., Yano, M. (2001). Chaotic Equilibrium Dynamics in Endogenous Growth Models. *Journal of Economic Theory*, 96, 97-132.
17. Brock, W. A., & Scheinkman, J. A. (1976). Global asymptotic stability of optimal control systems with applications to the theory of economic growth. In *The Hamiltonian approach to dynamic economics* (pp. 164-190). Academic Press.
18. Bullard, J., & Butler, A. (1993). Nonlinearity and chaos in economic models: implications for policy decisions. *The Economic Journal*, 103(419), 849-867.
19. Carr, J. (2012). *Applications of centre manifold theory* (Vol. 35). Springer Science & Business Media.
20. Chiarella, C. (2012). *The elements of a nonlinear theory of economic dynamics* (Vol. 343). Springer Science & Business Media.
21. Chow, G. C. (1973). Problems of economic policy from the viewpoint of optimal control. *The American Economic Review*, 63(5), 825-837.
22. Colombo, L., & Weinrich, G. (2003). The Phillips curve as a long-run phenomenon in a macroeconomic model with complex dynamics. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(1), 1-26.
23. Cushing, J. M., Leverage, S., Chitnis, N., & Henson, S. M. (2004). Some discrete competition models and the competitive exclusion principle. *Journal of difference Equations and Applications*, 10(13-15), 1139-1151.
24. Dana, R. A., & Montrucchio, L. (1986). Dynamic complexity in duopoly games. *Journal of Economic Theory*, 40(1), 40-56.
25. Day, R. (1982). Irregular growth cycles. *American Economic Review*, 72, 406-414.
26. Day, R. H., & Shafer, W. (1985). Keynesian chaos. *Journal of Macroeconomics*, 7(2), 277-295.
27. Day, R., (1983). The emergence of chaos from classical economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 98, 201-213.
28. Deneckere, R., & Pelikan, S. (1986). Competitive chaos. *Journal of economic theory*, 40(1), 13-25.

29. Desai, M. (1973). Growth cycles and inflation in a model of the class struggle. *Journal of Economic Theory*, 6(6), 527-545.
30. Devaney, L.R.(1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2nd edn., Addison- Wesley, NY.
31. Dorfman, R. (1969). An economic interpretation of optimal control theory. *The American Economic Review*, 59(5), 817-831.
32. Elaydi, S. (2003). Is the world evolving discretely?.
33. Elaydi, S. N. (1999). *An Introduction to Difference Equations*. Springer, Berlin.
34. Elaydi, S.N. (2007). *Discrete Chaos*. 2nd. Boca Raton. Chapman & Hall/CRC.
35. Farmer, R. (1986). Deficits and cycles. *Journal of Economic Theory*, 40, 77-88
36. Franke, J. E., & Yakubu, A. A. (1991). Mutual exclusion versus coexistence for discrete competitive systems. *Journal of Mathematical Biology*, 30(2), 161-168.
37. Gabisch, G. (1984). Nonlinear models of business cycle theory. In *Selected topics in operations research and mathematical economics* (pp. 205-222). Springer, Berlin, Heidelberg.
38. Gandolfo, G. (1997). *Economic dynamics: Study edition*. Springer Science & Business Media.
39. Gomis-Porqueras, P., & Haro, A. (2003). Global dynamics in macroeconomics: an overlapping generations example. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 27 (2003), 1941-1959.
40. Goodwin, R. M. (1991). Schumpeter, Keynes and the theory of economic evolution. *Journal of Evolutionary Economics*, 1(1), 29-47.
41. Goodwin, R.M. (1951). The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. *Econometrica* 19, 1–17.
42. Grandmont, J.-M., & Malgrange, P. (1986). Nonlinear Economic Dynamics: Introduction. *Journal of Economic Theory*, 40, 3-12
43. Grandmont, J-M. (1985). On endogenous competitive business cycles. *Econometrica*, 50, 1345-1370.
44. Guzowska, M. (2003). Analiza zjawisk bifurkacyjnych oraz analiza dynamiczna dla modelu Stutzerza. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego. Prace Katedry Ekonometrii i Statystyki*, (13), 189-199.
45. Haavelmo, T. (1954). *A Study in the Theory of Economic Evolution*. North-Holland, Amsterdam.
46. Hahn, F.R., (1992). Equilibrium dynamics and chaos: A textbook approach. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 210, 279-285
47. Hassell, H., Comins, H. (1976). Discrete time models for two-species competition, *Theor. Popul. Biol.*, 9(1976), 202-221.
48. Hilger, S. (1988). *Ein makettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten Ph. D, PhD thesis* (Doctoral dissertation, thesis).
49. Hilscher, R., & Zeidan, V. (2009). Weak maximum principle and accessory problem for control problems on time scales. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 70(9), 3209-3226.
50. Hommes, C. H. (1997). Models of complexity in economics and finance. *System Dynamics in Economic and Financial Models*, Wiley Publishers, 3-41.
51. Hozer, J., Zawadzki, J.(1990). *Zmienna czasowa i jej rola w badaniach ekonometrycznych*. Polskie Towarzystwo Naukowe.
52. Judd, K. L. (1998). *Numerical Methods in Economics*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
53. Jullien, B. (1988). Competitive business cycles in an overlapping generations economy with productive investment. *Journal of Economic Theory*, 46(1), 45-65.
54. Kahan, W. (1993). Unconventional numerical methods for trajectory calculations. *Unpublished lecture notes*, 1, 13.
55. Karydas, N., & Schinas, J. (1992). The center manifold theorem for a discrete system. *Applicable Analysis*, 44(3-4), 267-284.
56. Kelley, A. (1967). The stable, center-stable, center, center-unstable, and unstable manifolds. Published as Appendix C of R. Abraham and J. Robbin: *Transversal mappings and flows*.
57. Kloeden, P. E., & Platen, E. (2013). *Numerical solution of stochastic differential equations* (Vol. 23). Springer Science & Business Media.
58. Koçak, H. (1989). *Differential and Difference Equations through Computer Experiments*. 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.
59. Kuznetsov, Y. A. (2013). *Elements of applied bifurcation theory*(Vol. 112). Springer Science & Business Media.
60. Kwessi, E., Elaydi, S., Dennis, B., & Livadiotis, G. (2018). Nearly exact discretization of single species population models. *Natural Resource Modeling*, 31(4), e12167.
61. Li, T. Y., & Yorke, J. A. (1975). Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10), 985-992.
62. Liu, P., & Elaydi, S. N. (2001). Discrete competitive and cooperative models of Lotka–Volterra type. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 3(1), 53-73.

63. López-Ruiz, R., & Fournier-Prunaret, D. (2004). Complex behaviour in a discrete coupled logistic model for the symbiotic interaction of two species. *arXiv preprint nlin/0401045*.
64. Lorenz, H.-W. (1989). *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Springer – Verlag, Berlin.
65. Malinowska, A. B., & Torres, D. F. (2010). Euler-Lagrange equations for composition functionals in calculus of variations on time scales. *arXiv preprint arXiv:1007.0584*.
66. May, R. M. (1974). Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, 186(4164), 645-647.
67. Mickens, R. E. (1994). *Nonstandard finite difference models of differential equations*. world scientific.
68. Mickens, R. E. (2000). *Applications of nonstandard finite difference schemes*. World Scientific.
69. Mickens, R. E. (2003). A nonstandard finite-difference scheme for the Lotka–Volterra system. *Applied Numerical Mathematics*, 45(2-3), 309-314.
70. Mosekilde, E. (1996). *Topics in Nonlinear Dynamics. Application to Physics, Biology and Economic Systems*. World Scientific, London.
71. Nijkamp, P. (1987). Long-term economic fluctuations: a spatial view. *Socio-Economic Planning Sciences*, 21(3), 189-197.
72. Ninomiya, S. (2003). A new simulation scheme of diffusion processes: application of the Kusuoka approximation to finance problems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 62(3-6), 479-486
73. Nusse, H. E., & Hommes, C. H. (1990). Resolution of chaos with application to a modified Samuelson model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 14(1), 1-19.
74. Parker, J. A. (1999). The reaction of household consumption to predictable changes in social security taxes. *American Economic Review*, 89(4), 959-973.
75. Pelczar, A. (2003). *Czas i dynamika w równaniach różniczkowych i układach dynamicznych*, Wydawnictwo BIBLOS, Tarnów.
76. Pohjola, M. J. (1978). Stable and Chaotic Growth: the Dynamics of a Discrete Version of Goodwin' s Cycle Model. *Zeitschrift fur Nation*, 39, 245-25
77. Prokhorov, A. B. (2008). Nonlinear dynamics and chaos theory in economics: a historical perspective. *Quantile*, 4, 1-27.
78. Ramsey, F. P. (1928). A mathematical theory of saving. *The economic journal*, 38(152), 543-559.
79. Rand, D. (1978). Exotic phenomena in games and duopoly models. *Journal of Mathematical Economics*, 5(2), 173-184.
80. Roeger, L. I. W. (2004). Local stability of Euler's and Kahan's methods. *Journal of Difference Equations and Applications*, 10(6), 601-614.
81. Saari, D. G. (1984). The ultimate of chaos resulting from weighted voting systems. *Advances in Applied Mathematics*, 5(3), 286-308.
82. Saari, D. G., & Williams, S. R. (1986). On the local convergence of economic mechanisms. *Journal of Economic Theory*, 40(1), 152-167.
83. Samuelson, P. A. (1939). Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration. *The Review of Economics and Statistics*, 21(2), 75-78.
84. Sauer, T. (2012). Numerical solution of stochastic differential equations in finance. In *Handbook of computational finance*(pp. 529-550). Springer, Berlin, Heidelberg.
85. Shapiro, M. D., & Slemrod, J. (1993). *Consumer response to the timing of income: Evidence from a change in tax withholding* (No. w4344). National Bureau of Economic Research
86. Sharkovsky, A. N., Maistrenko, Y. L., & Romanenko, E. Y. (2012). *Difference equations and their applications* (Vol. 250). Springer Science & Business Media.
87. Solow, R.M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65-94.
88. Sordi, S. (1993). *Nonlinear models of the business cycle and chaos theory: A critical analysis*. Università degli Studi di Siena.
89. Sordi, S. (1996). *Chaos in macrodynamics: an excursion through the literature*. Siena: Università di Siena.
90. Sorger, G. (1995). Discrete time dynamic game models for advertising competition in a duopoly. *Optimal control applications & methods*, 16(3), 175-188.
91. Stuart, A., & Humphries, A. R. (1998). *Dynamical systems and numerical analysis* (Vol. 2). Cambridge University Press.
92. Stutzer, M. J. (1980). Chaotic dynamics and bifurcation in a macro model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2, 353-376.
93. Succi, M. J., Lee, S. Y., & Alexander, J. A. (1997). Effects of market position and competition on rural hospital closures. *Health Services Research*, 31(6), 679.
94. Swan, T. W. (1956). Economic growth and capital accumulation. *Economic record*, 32(2), 334-361.
95. Tempczyk, M. (1995). *Świat harmonii i chaosu*. Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa.

96. Wolfstetter, E. (1982). Fiscal policy and the classical growth cycle. *Journal of Economics*, 42(4), 375-393
97. Wu, F., Mao, X., & Chen, K. (2008). A highly sensitive mean-reverting process in finance and the Euler–Maruyama approximations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 348(1), 540-554.
98. Zawadzki, H. (1996). *Chaotyczne systemy dynamiczne*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego, Katowice.
99. Zengru, D., & Sanglier, M. (1996). A two-dimensional logistic model for the interaction of demand and supply and its bifurcations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 7(12), 2259-2266.

6. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH

6.1. Problematyka badawcza

Charakteryzując mój pozostały dorobek naukowy po uzyskaniu stopnia doktora nauk ekonomicznych, poza nurtem przedstawionym jako dorobek podstawowy, który wykazałam jako osiągnięcie naukowe w rozumieniu art. 16. ust. 2. ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki, chciałabym wyróżnić dwa obszary badawcze, w których prowadzę badania oraz publikuję wyniki.

Metody pomiaru produktywności i efektywności

Pierwszy nurt stanowią prace zajmujące się problemem produktywności i efektywności, do badania których wykorzystano nieparametryczną metodę pomiaru efektywności DEA (Data Envelopment Analysis).

W ramach tego nurtu można wyróżnić dwie grupy badań: pierwszą dotyczącą efektywności pracy banków komercyjnych oraz drugą dotyczącą efektywności pracy jednostek sektora finansów publicznych w szczególności sądów i prokuratur.

Do cyklu opublikowanych prac w tym temacie wchodzi następujące pozycje:

- [1] **M. Guzowska**, T. Strąk (2010): *DEA method in examining the efficiency of Polish Courts*, Transformation in Business & Economics, Vol. 9, No 2, ISSN: 1648-4460

Impact Factor (2010) = **1,67**.

Udział własny: **50%**.

- [2] **M. Guzowska**, M. Kisielewska, J. Nellis, D. Zarzecki (2004): *Efficiency of the Polish Banking Sector – Assessing the Impact of Transformation*. Data Envelopment Analysis and Performance Management. Edited by Ali Emrouznejad and Victor Podinovski. Aston Business School, Aston University, Birmingham, s. 163-170.

- [3] **M. Guzowska**, M. Kisielewska, J. Nellis, D. Zarzecki (2005): *Efektywność polskiego sektora bankowego w latach 1995-2002*. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Nr 397, Prace Instytutu Ekonomiki i organizacji przedsiębiorstwa, Nr 42, s. 101-114.

- [4] **M. Guzowska**, M. Kisielewska, J. Nellis, D. Zarzecki (2005): *Efficiency of the Major Banking Players in Poland*. Czas na Pieniądz. Zarządzanie Finansami. Biznes, Bankowość i Finanse na rynkach wschodzących, red. K. Waniek, s. 569-579.

- [5] **M. Guzowska**, M. Kisielewska, D. Zarzecki, T. Wiśniewski, K. Byrka-Kita (2005): *Ocena efektywności banków komercyjnych w Polsce za pomocą metody DEA (Data Envelopment Analysis)*, *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu*, nr 1060, Efektywność – rozważania nad istotą i pomiarem, s 463-479.
- [6] **M. Guzowska**, M. Kisielewska (2006): *Koncentracja działalności sektora bankowego w Polsce w latach 1995-2002*, *Zeszyty Naukowe*, Uniwersytet Szczeciński, nr 416, *Prace Instytutu Ekonomiki i Organizacji Przedsiębiorstw*, nr 47, s. 189-198.
- [7] **M. Guzowska**, M. Kisielewska, J. Nellis, D. Zarzecki (2005): *Polish Banking Industry Efficiency: DEA Window Analysis Approach*, *The International Journal of Banking and Finance*, 3-4 (Special Issue): s. 15-31.
(<https://dspace.lib.cranfield.ac.uk/handle/1826/3945>).
- [8] **M. Guzowska**, T. Strąk (2009): *Badanie efektywności jednostek sektora publicznego metodą DEA na przykładzie powszechnych jednostek organizacyjnych prokuratury*, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Ekonomiczne Problemy Usług*, nr 36, s. 122-129.
- [9] **M. Guzowska**, T. Strąk (2010): *An examination of the efficiency of Polish public sector entities based on public prosecutor offices*, *Operations Research and Decision*, Nr 2, s. 41-57.
- [10] **M. Guzowska**, T. Strąk (2013): *Measuring Efficiency of Courts with DEA – civil cases case study*, *Actual Problem of Economics*, No 1, Vol. 2, s. 70-80.
- [11] **M. Guzowska**, T. Strąk (2013): *Analiza polityki publicznej w zakresie zatrudnienia oraz wynagrodzenia w polskiej administracji w latach 2002–2011*, *Management and Business Administration*, Central Europe, Nr 2, Vol. 21, s. 117-138.
- [12] **M. Guzowska** (2014): *Charakterystyka opracowanego narzędzia systemowego zaproponowanego do badania efektywności i skuteczności realizacji celów i mierników w: „Ocena efektywności i skuteczności realizacji planów w układzie zadaniowym oraz osiągniętych celów na podstawie mierników przyjętych w ramach części budżetowej 20. Gospodarka ze szczególnym uwzględnieniem potrzeb wynikających z zastosowania przepisu art. 175. ust. 1. pkt. 4. ustawy o finansach publicznych”*, MCC Grupa Sp. z o.o., Warszawa, s. 381-395, ISBN 978-83937854-5-2.

Zastosowanie metod matematycznych oraz ilościowych do pomiaru i analizy zjawisk ekonomicznych i społecznych

Drugim istotnym obszarem moich zainteresowań naukowo-badawczych jest zastosowanie metod matematycznych i ilościowych do pomiaru i analizy zjawisk ekonomicznych i społecznych. W tym obszarze, w latach 2003-2019, opublikowałam między innymi 10 poniżej wskazanych prac. Główną tematyką prac z tej grupy jest analiza własności dynamicznych modeli ekonomicznych oraz wykorzystanie matematycznych do szukania prawidłowości w zjawiskach ekonomiczno-społecznych.

- [1] **M. Guzowska** (2003): *Analiza zjawisk bifurkacyjnych oraz analiza dynamiczna dla modelu Stutzera*, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Prace KEiS, Metody ilościowe w ekonomii*, Nr 13 (345), s. 189-199.

- [2] **M. Guzowska** (2003): *Analiza udziału osób niepełnosprawnych w rynku pracy na przykładzie województwa zachodniopomorskiego*, red. J. Hozer, Rozprawy i Studia US (DXXIX), Nr 455.
- [3] J. Batóg, B. Batóg, I. Bąk, **M. Guzowska**, I. Markowicz, M. Mojsiewicz (2003): *Analiza udziału osób niepełnosprawnych na rynku pracy*, Rehabilitacja Zawodowa Osób Niepełnosprawnych, Osoba Niepełnosprawna na Rynku Pracy, wydane przez: Urząd Marszałkowski woj. Zachodniopomorskiego, Urząd Miejski w Szczecinie, Szczecin.
- [4] **M. Guzowska** (2004): *Bubble Bifurcations in the Economic Models*, Zeszyty Naukowe US, Nr 394, Prace Katedry Ekonometrii i Statystyki, Nr 15, część I, s. 101-112.
- [5] **M. Guzowska** (2006): *Dyskretny chaos w systemach ekonomicznych*, Dydaktyka matematyki, Prace Naukowe AE we Wrocławiu, Nr 1117, Wrocław, s. 40-48.
- [6] **M. Guzowska**, M. Doszyń (2011): *Wpływ czynników subiektywnych (skłonności) na rozwiązanie podstawowego modelu Michała Kaleckiego*, Modelowanie zjawisk gospodarczych – elementy teorii. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Tom 211, s. 137-146.
- [7] **M. Guzowska** (2012): *Bubbling and Bistability in the Immigration and Integration Model*, Zeszyty Naukowe, Uniwersytet Szczeciński, nr 731. Studia i Prace WNEiZ, Nr 26, s. 121-136.
- [8] **M. Guzowska**, M. Doszyń (2014): *Sposoby tworzenia kontraktu w modelu Agent-Pryncypał a skłonność do ryzyka*. Zeszyty Naukowe, Uniwersytet Szczeciński, nr 811, Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, s. 53-62.
- [9] **M. Guzowska** (2016): *Zasada Alleego w ekonomii – wprowadzenie*, Studia i Prace WNEiZ US, nr 45, T. 1. Metody ilościowe w ekonomii, s. 107-115.
- [10] **M. Guzowska**, P Thanh Quang (2017): *Foreign Direct Investment in Poland and Vietnam: A Compare Analyses*, Studia i Prace WNEiZ US, nr 49, T.2, s. 247-261.

6.2. Projekty badawcze

Po uzyskaniu tytułu doktora nauk ekonomicznych uczestniczyłam w **3** projektach naukowo-badawczych oraz **5** projektach zawierających elementy naukowo-badawcze. Większa część z nich finansowana była z budżetów przeznaczonych na naukę, jednak kilka finansowanych ze środków Unii Europejskiej, podmioty gospodarcze lub urzędy administracji państwowej.

1. Projekty naukowo-badawcze:

- 2015** „Continuous versus Discrete-time Models in Economics”, realizowany w ramach Dekaban-Liddle Fellowship – badanie realizowane w University of Glasgow (marzec 2015) - **kierownik projektu, wykonawca**,

- 2009-2010** „Problem równoważności modeli ekonomicznych z czasem ciągłym i dyskretnym” – grant Ministra MNiSW:
„Wsparcie międzynarodowej mobilności naukowców” (III edycja programu), nr DPN/DWM/AK/6040/08/09, realizowany w Trinity University, San Antonio, TX, USA – **kierownik projektu, wykonawca**,
- 2002-2004** Analiza rozkładów wartości w zagadnieniach aktuarialnych i demograficznych, grant KBN – **wykonawca**.

2. Projekty zawierające elementy naukowo-badawcze:

- 2018– 2020** Improvement of Research and Innovation skills in Mongolian Universities [ARROW], w ramach programu Erasmus Plus, konkurs: Key Action 2: Capacity building in the field of higher education – **wykonawca**.
- 2017-2020** Personalized Engineering Education in Southern Africa [PEESA III], w ramach programu Erasmus Plus, konkurs: Key Action 2: Capacity building in the field of higher education – **koordynator projektu** ze strony Uniwersytetu Szczecińskiego oraz **wykonawca** (w latach 2017-2018).
- 2016-2019** Euro-African Network of excellence for entrepreneurship and Innovation [INSTART], w ramach programu Erasmus Plus, konkurs: Key Action 2: Capacity building in the field of higher education – **koordynator projektu** ze strony Uniwersytetu Szczecińskiego, **wykonawca**.
- 2009-2011** Projekt dla MSWiA „Wdrażanie usprawnień zarządczych w administracji samorządowej” – **wykonawca**.
- 2004-2007** Projekt FEM (Female Entrepreneur’s Meeting in the Baltic Sea Region) realizowanego w ramach INTERREG II B – **wykonawca**.

Szczegółowe zestawienie osiągnięć zawiera **Załącznik 3**.

6.3. Konferencje naukowe

Po uzyskaniu stopnia doktora nauk ekonomicznych wyniki swoich prac prezentowałam na **42** konferencjach naukowych w tym **30** międzynarodowych. Na konferencjach międzynarodowych **6**rotnie przewodniczyłam w sesjach, w tym w jednej sesji plenarnej (ICDEA2018). W roku 2015 zostałam członkiem Komitetu Naukowego International Conference of Difference Equations and Applications (ICDEA2016), która odbyła się w Osace w Japonii, a w 2018 zostałam członkiem Komitetu Naukowego ICDEA2018, w Dreźnie (Niemcy).

Szczegółowe zestawienie osiągnięć zawiera **Załącznik 3**.

6.4. Nagrody i stypendia

Podczas pracy na Wydziale Nauk Ekonomicznych i Zarządzania zostałam dwukrotnie nagrodzona za pracę naukową i dydaktyczną nagrodą Rektora US. Kilkunastokrotnie otrzymałam stypendium w ramach programu ERASMUS LLP na krótkie pobyty zagraniczne. Moja działalność naukowa została także doceniona poza macierzystą uczelnią w postaci przyznania mi m.in.: następujących nagród i stypendiów:

- stypendium Dekabana-Liddle,
- 2-krotnie stypendium w ramach programu IMPAKT (Erasmus Mundus),
- 2-krotnie stypendium COLLEGIO MATTEO RICCI (Macerata University).

Szczegółowy wykaz wystąpień zawiera **Załącznik 3**.

7. INFORMACJA O OSIĄGNIĘCIACH DYDAKTYCZNYCH, WSPÓLPRACY Z INSTYTUCJAMI, ORGANIZACJAMI I TOWARZYSTWAMI NAUKOWYMI ORAZ O DZIAŁALNOŚCI POPULARYZUJĄCEJ NAUKĘ

Tabela 2. Tabela zestawienie dorobku dydaktycznego, współpracy z instytucjami, organizacjami i towarzystwami oraz działalności popularyzującej naukę

Wskaźniki dorobku		
Wygłoszenie referatów naukowych	j. polski	j. angielski
	7	35
Udział w konferencjach naukowych	krajowe	międzynarodowe
	7	35
Udział w radach programowych konferencji	2	
Udział w komitetach organizacyjnych konferencji	8	
Staże zagraniczne	6	
Nagrody za działalność naukową	2	
Nagrody za działalność dydaktyczną	12	
Recenzowanie artykułów	38 w języku angielskim 1 w języku polskim	
Udział w komitetach redakcyjnych czasopism	1	
Udział w zespołach konkursowych	1	
Wykonanie ekspertyz oraz innych opracowań	8	
Udział w popularyzowaniu nauki	5	

7.1. Działalność dydaktyczna

Działalność dydaktyczna jest bardzo ważnym elementem mojej pracy na uczelni. Od początku swojej pracy na Wydziale Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, Uniwersytetu Szczecińskiego uczestniczę w procesie dydaktycznym prowadząc na studiach licencjackich i magisterskich następujące zajęcia:

1. Algebra liniowa – autorskie wykłady i ćwiczenia (w języku polskim i angielskim).
2. Topics in Urban and Housing Policy – autorskie wykłady i ćwiczenia (w języku angielskim).
3. Ekonomia matematyczna – autorskie wykłady i ćwiczenia (w języku polskim).
4. Wstęp do ekonomii matematycznej – autorskie wykłady i ćwiczenia (w języku polskim).
5. Metody numeryczne – autorskie wykłady i laboratoria (w języku polskim).
6. Game theory and dynamical systems – autorskie wykłady i ćwiczenia (w języku angielskim).
7. Rachunek prawdopodobieństwa – ćwiczenia (w języku polskim).
8. Analiza matematyczna – wykłady i ćwiczenia (w języku polskim).
9. Matematyka – autorskie wykłady i ćwiczenia (w języku polskim).
10. Matematyka II – ćwiczenia (w języku polskim).

Moja praca dydaktyczna jest wysoko oceniana zarówno przez władze uczelni jak i przez studentów, o czym świadczy **nagroda Rektora US** za szczególne osiągnięcia dydaktyczne, przyznanie mi łącznie **11** nagród i wyróżnień nadawanych przez studentów w konkursie przez nich organizowanym „Złota Kreda”, a także przyznanie mi w 2015 roku **Medalu Komisji Edukacji Narodowej**.

W okresie od doktoratu uczestniczyłam w **6**. projektach międzynarodowych, gdzie część realizowanych zadań związana jest z dydaktyką. W **4**. projektach pełniłam funkcje kierownicze.

W swojej pracy naukowej i dydaktycznej staram się włączać studentów w prace i projekty, w których uczestniczę. Między innymi w ramach projektu „Europe Renaissance” (2014-2015) realizowanego przez FH Dortmund, University of Szczecin, ESIC Madrid, ESIC Valencia, Groupe Sup de Co La Rochelle, Groupe ESC Pau, University of Szeged, University of Cluj-Napoca oraz University of Kostroma, sprawowałam opiekę naukową i merytoryczną nad studentami realizującymi następujące tematy badawcze:

- Intercultural approach to European enterprises: What is the specific profile of European companies? How do religion, beliefs and migration impact on the enterprise environment?,
- Corporate Social Responsibility and Ethics: How can European companies contribute to a better future? Which „best practices” are needed?,
- Opportunities in this European working land: Which is the ideal human profile for European companies? What is this new young talent useful for European companies?,
- Communication, digital life and new media: Describe the impact on the business environment. „Profitability” versus „human being”,
- Nation state, new nationalism, separatism and the future of UE?,
- Reasons of disenchantment of European youth – Which opportunities for the European research area?,
- Financial crisis and the future of the Euro.

Moje osiągnięcia naukowe zostały docenione przez grono akademickie z University of Aveiro w Portugalii, przez które zostałam poproszona o **zrecenzowanie pracy doktorskiej** „*Calculus of Variations on Time Scales and Applications to Economics*”, powstałej na tej uczelni. Zostałam poproszona także o uczestnictwo w publicznej obronie pracy w roli recenzenta oraz członka Komisji ds. przewodu doktorskiego w dniu 24 września 2014, University of Aveiro, Aveiro (Portugalia).

Szczegółowy wykaz osiągnięć dydaktycznych zawiera **Załącznik 3**.

7.2. Działalności organizacyjna, popularyzatorska, współpraca z instytucjami i organizacjami naukowymi

Aktywnie uczestniczę w życiu Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania Uniwersytetu Szczecińskiego. Od dwóch kadencji (2012-2016, 2016-2020) jestem **członkiem Senatu US**, jednocześnie pełniąc funkcję przewodniczącej Senackiej Komisji Skrutacyjnej. W latach 2004-2013 pełniłam funkcję **kierownika** Zakładu Zastosowań Matematyki w Ekonomii. W latach 2013-2016 byłam **członkiem Rady Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania**.

W latach 2012-2016 pełniłam funkcję **Wydziałowego Koordynatora** ds. wymiany pracowników i studentów w programach Erasmus i Most. Dodatkowo w latach 2015-2018 pełniłam funkcję **Wydziałowego Koordynatora** ds. wymiany pracowników i studentów w programie IMPAKT (Erasmus Mundus). Od 2013 roku jestem **członkiem Wydziałowego Zespołu ds. Jakości i Programów Kształcenia**.

Od wielu lat jestem członkiem Polskiego Towarzystwa Statystycznego, International Society of Difference Equations, Americana Mathematical Society oraz Italian Society for Chaos and Complexity.

Moja działalność naukowa i popularyzatorska na arenie międzynarodowej została doceniona przez członków International Society of Difference Equations, którzy na lata 2015-2017, oraz na lata 2017-2019, w ramach tajnego głosowania, wybrali mnie na **członka Zarządu** tego towarzystwa naukowego. Należy tu podkreślić, że jestem drugą kobietą, która w historii ISDE weszła w skład Zarządu, jednocześnie pierwszą Europejką wybraną do zarządu ISDE.

Angażuję się w proces oceny publikacji naukowych. Recenzowałam artykuły w renomowanych czasopismach naukowych takich jak: **Advances in Difference Equations** (Lista A MNiSW, 30 pkt.), **Chaos, Solitons & Fractals** (Lista A MNiSW, 30 pkt.), **Control and Cybernetics** (Lista A/B MNiSW, 20/14 pkt.), **Discrete Dynamics in Nature and Society** (Lista A MNiSW, 30 pkt.), **Entropy** (Lista A MNiSW, 30 pkt.), **Fasciculi Mathematici** (Lista B MNiSW, 10 pkt.), International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, **Journal of Difference Equations and Applications** (Lista A MNiSW, 25 pkt.), **Journal: Control & Cybernetics** (Lista A/B MNiSW, 20/14 pkt.), **Management and Business Administration. Central Europe** (Lista B MNiSW, 13 pkt.).

Szczegółowy wykaz osiągnięć dydaktycznych zawiera **Załącznik 3**.

Małgorzata Guroch

Szczecin, 29.04.2019