Ocena rozprawy doktorskiej
mgr Hanny Ćmiel
„Continuity of Roots and Values for Valued Fields"

Badania lokalizacji zer oraz szacowania odległości między pierwiastkami wielomianów sięgają swoją historią co najmniej do czasów Cauchy'ego. Jednym z zagadnień rozważanych w tej teorii jest problematyka ciągłości pierwiastków. Intuicyjnie czujemy, że jeżeli dwa wielomiany są „dostatecznie bliskie", to ich pierwiastki również powinny leżeć „blisko" siebie. Recenzowana rozprawa bada do jakiego stopnia to intuicyjne odczucie sprawdza się w realiach teorii waluacji, gdy pojęcie bliskości jest wyrażone za pomocą ultrametryki zadanej waluacją.

Rozprawa składa się z sześciu rozdziałów. Rozdział pierwszy, zatytułowany „Notation and background" ma charakter wyłącznie wprowadzający. Służy głównie ustaleniu terminologii i notacji stosowanej w pracy. Rozdział drugi zawiera wyniki dotyczące ciągłości pierwiastków, których dowody nie wymagają pojęcia łamanej Newtona (wprowadzonego później). W szczególności, autorka dowodzi tu twierdzenia 2.1.3 oraz 2.1.8, które są waluacyjnymi odpowiednikami klasycznej ciągłości pierwiastków. Innym podejściem do ciągłości pierwiastków jest rozważanie zbieżnych ciągów (bądź sieci) wielomianów i odpowiadających im ciągów (odpowiednio sieci) pierwiastków. To podejście jest rozważane w podrozdziale 2.2 (zob. twierdzenia 2.2.2 oraz 2.2.5).

Celem rozdziału 3. jest wprowadzenie łamanej Newtona, które to pojęcie stanowi główne narzędzie używane w dalszej części rozprawy. Główne wyniki pracy zostały zawarte w rozdziałach od 4. do 6. W rozdziale 4. autorka wykazała, że jeżeli dwa wielomiany są dostatecznie bliskie siebie, to ich łamane Newtona się częściowo pokrywają (zob. twierdzenie 4.1.1). Z tego wyniku autorka wyciąga szereg konsekwencji dotyczących ciągłości pierwiastków (zob. twierdzenia 4.1.5, 4.2.2, 4.2.5, 4.2.8 oraz 4.2.9). Następie, rozdział 5. został poświęcony ciągłości pierwiastków i biegunów funkcji wymiernych. W ostatnim, szóstym rozdziale autorka czyni kolejny krok wskazując zastosowania wyników uzyskanych w poprzednich rozdziałach rozprawy. Dwa zastosowania zdecydowanie warte odnotowania to: „ciągłość rozkładu" wielomianów (zob. twierdzenia 6.1.3, 6.2.5) oraz fakt, iż niezmienniki z zakresu teorii rozgałęzień dla dwóch rozszerzeń ciał się pokrywają, gdy rozszerzenia te są wyznaczone przez wielomiany dostatecznie bliskie (zob. twierdzenie 6.3.5). Ten ostatni wynik osobiście uważam za najbardziej interesujący w całej rozprawie.

Większość rezultatów rozprawy nie jest zupełnie nowa. Są to głównie uogólnienia i wzmocnienia wcześniej znanych wyników. Niemniej rezultaty te są ciekawe i istotnie poszerzają naszą wiedzę na temat ciągłości pierwiastków. W szczególności wyniki H. Ćmiel są w większości efektywne, w tym sensie, że zamiast sformułowań w języku ε–δ, twierdzenia zawarte w rozprawie podają konkretne oszacowania na δ (por. np. twierdzenie 2.1.3 oraz [15, Theorem 30.26]). Kolejnym wartym podkreślenia faktem jest to, iż większość z wyników w pracy została udowodniona bez założenia rozdzielczości rozważanych wielomianów, które to założenie występuje we wcześniejszych pracach. To dowodzi posiadania przez autorkę szerokiej wiedzy w zakresie teorii waluacji, dobrej intuicji matematycznej i zdolności prowadzenia samodzielnych badań naukowych.

Rozprawa jest napisana w sposób czytelny. Struktura pracy jest klarowna i logiczna. Autorka wykazuje dojrzałość w zakresie używanego języka matematycznego. Szczególnie godnym podkreślenia atutem pracy jest spora liczba dobre przemyślanych przykładów. Służą one nie tylko zilustrowaniu pojęć i twierdzeń, ale również — co ważniejsze — pokazują znaczenie poszczególnych założeń bądź fakt, iż pewnych oszacowań nie można poprawić. Jest to istotny aspekt pracy, gdyż wskazuje na pewną optymalność uzyskanych wyników.

Drobne zastrzeżenia budzi jedynie przykład 4.2.7. Celem tego przykładu jest pokazanie, że oszacowanie $v(f-g)$ w twierdzeniu 4.2.2 nie może być poprawiona. Przykład jest co prawda poprawny, jednakże zależy on od przyjętej umowy dotyczącej wartości niezmiennika Krasnera dla wielomianów mających wyłącznie jeden pierwiastek. Niezmiennik Krasnera jest waluacyjnym odpowiednikiem minimalnej odległości pierwiastków wielomianu. Oba te pojęcia są jednoznaczne i dobrze określone, gdy wielomian posiada co najmniej dwa różne pierwiastki. Jeżeli jednak wielomian posiada tylko jeden pierwiastek, to w klasycznym (tzn. dla zwykłej normy) ujęciu spotyka się co najmniej trzy różne konwencje dotyczące minimalnej odległości między pierwiastkami. Zatem byłoby lepiej gdyby we wzmiankowanym przykładzie wielomian f posiadał więcej niż jeden pierwiastek, gdyż wtedy nie zachodzą rozbieżności między różnymi konwencjami.

W opinii niżej podpisanego, najsłabszą częścią rozprawy jest rozdział 5. Użycie — dość arbitralnie wybranej — ultrametryki u budzi wątpliwości. Ultrametryka ta nie jest w pełni naturalna, ani też nie prowadzi do na tyle interesujących wyników, które by uzasadniały jej wybór. W szczególności, należy zauważyć, że wyników dotyczących wielomianów nie daje się wywnioskować z rezultatów dotyczących funkcji wymiernych.

Z obowiązku recenzyjnego należy też wspomnieć o pewnych nieznacznych niedociągnięciach rozprawy. Po pierwsze, czasami autorka używa pewnych pojęć przed ich zdefiniowaniem (np. zbiory ko-finalne są definiowane na stronie 22 zaś używane już na stronie 9). Nie jest to wielki problem, gdyż dotyczy to wyłącznie pojęć standardowych i dobrze znanych. Niemniej, jeżeli już autorka zdecydowała się dane pojęcie definiować, należało to zrobić przed jego pierwszym użyciem.

Po drugie, równość $\min_{i\leqslant j\leqslant n} va_j = v\partial_i f$ (zob. str. 12 wiersz -5) jest ogólnie fałszywa. Jako przykład rozważmy ciało $\mathbb{Q}$, wielomian $f = x^4+1$ oraz waluację 2-adyczną v. Wówczas dla $i=1$ mamy $v\partial_1 f = 2$ podczas gdy $\min_{1\leqslant j\leqslant 4} va_j = 0$. Na szczęście, błąd ten nie wpływa na poprawność całego dowodu, gdyż równość ta jest kompletnie zbędna do dowiedzenia nierówności, która po niej występuje.

Należy też zauważyć, że założenie w twierdzeniu 2.2.2 (i następującym po nim wniosku 2.2.3), że wszystkie wielomiany w sieci mają ten sam stopień jest prawdopodobnie nadmiarowe. Skoro zakładamy, że sieć jest zbieżna, to od pewnego miejsca wielomiany muszą już mieć stopień równy stopniowi granicy.

Podsumowując, moja opinia na temat recenzowanej rozprawy jest jednoznacznie pozytywna. Jak wykazano wyżej praca zawiera szereg istotnych wyników matematycznych. Stwierdzam zatem, iż rozprawa doktorska mgr Hanny Ćmiel stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego w rozumieniu Art. 187, pkt. 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018r. *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce*. Rozprawa wskazuje na posiadanie przez autorkę ogólnej wiedzy teoretycznej w dyscyplinie matematyka oraz umiejętność prowadzenia samodzielnej pracy naukowej. W opinii niżej podpisanego, rozprawa spełnia zwyczajowe i ustawowe wymogi stawiane pracom doktorskim. **W związku z powyższym wnoszę o dopuszczenie mgr Hanny Ćmiel do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora**.

Przemysław Koprowski

Katowice, 17 maja 2022