**Recenzja pracy doktorskiej**
***Algebraic hyperstructures in the model theory of valued fields***
**przedstawionej przez mgr. Alessandro Linzi**

Praca doktorska dotyczy teorii modeli ciał z waluacją z punktu widzenia teorii *hiperciał* (z waluacją). Pojęcie hiperciała uogólnia pojęcie ciała poprzez dopuszczenie jako wartości dodawania dowolnych niepustych zbiorów a nie jedynie singletonów. Krasner wprowadził to pojęcie w 1957. roku mając na myśli dokładnie ciała z waluacją.

Teoria modeli ciał z waluacją była rozważana od 60 lat i ma ona wiele zastosowań, dla przykładu: wyniki Denefa (wymierność pewnych szeregów Poincaré) i wyniki Hrushovskiego (całkowanie motywiczne, niestandardowy Frobenius). Praca doktorska dotyczy relatywnej eliminacji kwantyfikatorów w kontekście ciał z waluacją. Rozważanie te mają również długą historię zaczynając od prac Axa-Kochena i Ershova, później Macintyre'a ("power predicates"), Pasa ("angular component map"), Basaraba ("mixed structures"), Kuhlmanna ("amc structures") i Flennera ("RV-structures").

Praca ta ma pięć rozdziałów i dwa dodatki, które są omówione poniżej, gdzie również opisuję główne rezultaty pracy.

W rozdziale pierwszym zawarty jest zwięzły wstęp do teorio-modelowych metod, które są później potrzebne w pracy. Są tu również wprowadzone języki pierwszego rzędu, które są potrzebne później w kontekście hiperciał (z waluacją). Ternarny symbol relacyjny jest tu wybrany aby opisać wielowartościowe dodawanie o czym napiszę więcej w kolejnym akapicie.

W rozdziale drugim zawarta jest algebraiczna teoria hiperciał. Jedną z różnic pomiędzy klasycznymi strukturami algebraicznymi a hiperstrukturami jest to, że w przypadku hiperstruktur trzeba wybrać pomiędzy pojęciami „podzbioru" i „równości" starając się znaleźć właściwe definicje (to rozróżnienie rzecz jasna znika w przypadku singletonów). Dlatego też jest wiele wersji aksjomatów hipergrup czy też hiperpierścieni w literaturze i trzeba uważnie wybrać „właściwe" wersje, co udaje się autorowi. Podobne problemy pojawiają się rozważając pojęcie morfizmu i, jak autor słusznie zauważa, równość (jak w aksjomacie (HH3") na stronie 28) byłaby złym wyborem tutaj, ponieważ w nasyconym hiperciele dodawanie miałoby bardzo duże zbiory wartości, tak więc małę hiperciała nie zanurzałyby się w model nasycony, co byłoby sytuacją dziwną i niepożądaną. Główną naturalną konstrukcją hiperciał są multyplikatywne ilorazy ciał. Żadne inne konstrukcje hiperciał nie pojawiają się w tej rozprawie doktorskiej.

W trzecim rozdziale pojawiają się związki pomiędzy ciałami z waluacją oraz algebraicznymi hiperstrukturami opisanymi w rozdziale drugim. Do każdego ciała z waluacją przypisany jest system odwrotny hiperciał z waluacją i te hiperciała pochodzą od pewnych multyplikatwynych ilorazów opisanych w rozdziale drugim. Z punktu widzenia teorii modeli, wybór symbolu relacyjnego dla hiperdziałania ma następujący słaby punkt: teorio-modelowe podstruktury dopuszczają puste wartości hiperdziałania, tak więc *nie muszą* one być algebraicznymi podstrukturami. Ten problem wydaje się niemożliwy do przezwyciężenia, ale poza tym autorowi udało się znaleźć klasę hiperciał gdzie teorio-modelowe podstruktury, które spełniają powyższe założenie „niepustości", są hiperciałami (Twierdzenie 3.29). Kluczową własnością tej szczególnej klasy hiperciał jest to, że zbiory wartości dodawania są ultrametrycznymi kulami, tak więc „niepusty przekrój" staje się „inkluzją" i to właśnie daje teorio-modelowe uproszczenie opisane powyżej.

W czwartym rozdziale znajduje się bardziej szczegółowa analiza związków pomiędzy hiperciałami z waluacją związanymi z ciałami z waluacją a strukturami, o których była mowa powyżej: „RV-structures”, „amc structures” i „angular component maps”. Dodatkowo, pierścienie z gradacją są tu również rozważane w powyższym kontekście. Wszystko to jest potrzebne do teorio-modelowych zastosowań, które znajdują się w następnym (i ostatnim) rozdziale pracy.

Piąty rozdział zawiera główne rezultaty pracy, które dotyczą relatywnej eliminacji kwantyfikatorów dla henselowskich ciał z waluacją charakterystyki 0. Twierdzenie 5.5 jest ogólnym wynikiem tłumaczącym twierdzenie Kuhlmanna o eliminacji kwantyfikatorów na pojęcia związane z hiperciałami z waluacją. Używając Twierdzenia 5.5, autor dowodzi w Twierdzeniu 5.11 relatywną eliminację kwantyfikatorów dla henselowskich ciał z waluacją „equicharakterystyki 0” względem *jednego* hiperciała z waluacją. W przypadku „charakterystyki mieszanej”, Wniosek 5.32 daje relatywną eliminację kwantyfikatorów względem *nieskończenie wielu* hiperciał z waluacją.

Ta rozprawa doktorska ma poprawny układ i jest w większości dobrze napisana. Mam wciąż kilka sugestii i uwag, które są poniżej.

1. Wolałbym aby główne wyniki pracy były wyraźnie wypisane we wstępie wraz z dokładnym opisem, które z tych rezultatów zostały samodzielnie uzyskane przez autora, a które powstały we współpracy z innymi matematykami.

2. page 4: Nie słyszałem o pojęciu „*strict* morphism” w kontekście teorii modeli. Skąd to pojęcie pochodzi?

3. Wolałbym aby w Rozdziale 2.1 było więcej przykładów hiperciał (nie ma żadnych poza konstrukcją multyplikatywnych ilorazów oraz 3-elementowego hiperciała z Przykładu 2.10) zamiast szczegółowych i niezbyt skomplikowanych dowodów.

4. page 55: „one cannot ensure that associativity...”: czy są tu kontrprzykłady, czy jest to jedynie wrażenie autora, że „one cannot”?

5. page 83, Rozważania na temat pierścieni z gradacją w kontekście teorii modeli: Nie do końca rozumiem pierwszy akapit tutaj. Najpierw autor rozważa pierścienie z gradacją w języku zawierającym unarny symbol relacyjny (w szczególności, ten język *nie jest* językiem pierścieni $\mathcal{L}_r$), a potem autor konkluduje, że „an $\mathcal{L}_r$-*theory* whose models are exactly graded rings does not exist”. Poza tym, że języki się nie zgadzają, odnoszę wrażenie że autor tutaj może mylić *niemożność udowodnienia danej własności* z *udowodnieniem negacji tejże własności.*

6. Definition 5.1. Nie sądzę aby ta definicja była w ostatecznej, właściwej formie. Komentarze na ten temat są poniżej.

   (a) Czy $A'$ zależy od $i$? Kolejność kwantyfikowania sugeruje, że tak, ale notacja sugeruje, że nie.

   (b) Własność (TR) nie wydaje się być częścią definicji, wygląda ona raczej na warunek do spełnienia aby zapewnić relatywną podstrukturalną zupełność. Dla przykładu, jeśli $A'$ *zależy* od $i$ i jeśli $A = \bigcup_i A'_i$, to wtedy wydaje się że własność (TR) implikuje relatywną podstrukturalną zupełność.

   (c) Żadne konkretne przykłady nie pojawiają się w pracy co do sytuacji w której ta definicja byłaby używana, na przykład: nie zauważyłem żadnej konkretyzacji czym „$A'$” z Definicji 5.1 mogłoby być w rozważanych sytuacjach. W szczególności, sądzę że warto byłoby opisać dokładnie użycie Definicji 5.1 w kontekście Wniosku 5.32.

7. Lematy 5.2 i 5.4: Oba rezultaty wynikają w łatwy sposób z lematu Łosia, z którego dostajemy następującą ogólną własność:
„*Definiowalne konstruckcje są przemienne z braniem ultraproduktów*”.
Opiszę pokrótce tę własność na przykładzie relacji równoważności. Będę oznaczał przez $(M_i)_\mathcal{U}$ ultraprodukt struktur $(M_i)_{i\in I}$ względem ultrafiltru $\mathcal{U}$ na zbiorze $I$. Jeśli $R_i$ są definiowalnymi relacjami równoważności na $M_i$, to mamy naturalny izomorfizm:
$$(M_i/R_i)_\mathcal{U} \cong (M_i)_\mathcal{U}/(R_i)_\mathcal{U},$$
ponieważ dla każdych ciągów $(m_i, m_i' \in M_i)_{i\in I}$ mamy:
$$\{i \in I \mid M_i \models R_i\,(m_i, m_i')\} \in \mathcal{U} \qquad \text{iff} \qquad (M_i)_\mathcal{U} \models (R_i)_\mathcal{U}\,((m_i)_\mathcal{U}, (m_i')_\mathcal{U})$$
używając lematu Łosia. Tak więc sądzę, że dowody Lematów 5.2 i 5.4 powtarzają dowód (pewnych szczególnych przypadków) lematu Łosia.

8. Dodatek B: Wolałbym mieć tutaj pełne sformułowanie na temat uniwersalności teorii hiperciał w kontekście hiperciał pojawiających się we Wniosku B.2. Zapewne takie sformułowanie wyglądałoby następująco:
„*Wszystkie aksjomaty są uniwersalne poza:* $\forall x, y \exists z r_+(x, y; z)$”.

Moje powyższe komentarze dotyczą jedynie formy prezentacji i nie mają wpływu na ostateczną ocenę pracy, która jest poniżej.

***Konkluzja***

Uważam, że ta rozprawa doktorska prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w dyscyplinie matematyka oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Podsumowując, **przedłożona rozprawa spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o jej przyjęcie oraz dopuszczenie mgr. Alessandro Linzi do dalszych etapów postępowania doktorskiego**.

Piotr Leszek Kowalski

Elektronicznie podpisany przez Piotr Leszek Kowalski
Data: 2022.05.19 13:00:00 +03'00'

Prof. dr hab. Piotr Kowalski
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego