

Recenzja rozprawy doktorskiej

Alessandro Linzi

## **Algebraic hyperstructures in the model theory of valued fields**

(23 maja 2022)

Przedstawiona rozprawa dotyczy teorio-modelowych aspektów hiperciał z waluacją. Hiperciała (oraz, bardziej ogólnie, hiperpierścienie) są szczególnymi przypadkami tzw. *hiperstruktur*, czyli struktur algebraicznych w których przynajmniej jedna operacja jest wielowartościowa. Można pomyśleć, że uogólnianie struktur algebraicznych w ten sposób jest ma wartość tylko dla samej idei uogólniania. Zaskakujące jest, że taka teza jest całkowicie fałszywa. Mianowicie, hipergrupy, hiperpierścienie oraz hiperciała są istotne w nowoczesnej teorii liczb i geometrii algebraicznej, wliczając w to geometrię tropikalną. Hiperstruktury zostały zauważone przez kilkoro światowej klasy matematyków, między innymi medalistę Fieldsa Alaina Connesa. Teoria modeli hiperstruktur może być badana traktując operacje wielowartościowe jako relacje. Jeden z głównych tematów rozprawy to eliminacja kwantyfikatorów, prowadząca do zupełności podstruktur. Jest to ważne zagadnienie pojawiające się w teorii modeli, algebrze oraz informatyce teoretycznej.

---

Rozprawa opiera się częściowo na dwóch preprintach

1. Katarzyna Kuhlmann, Alessandro Linzi, Hanna Stojałowska, *Orderings and valuations in hyperfields*, 17 stron, arXiv:2106.04978
2. Alessandro Linzi, Hanna Stojałowska, *Hypervaluations on hyperfields and ordered canonical hypergroups*, 9 stron, arXiv:2009.08954

Obie prace są wieloautorowe. Jedną ze współauterek to Hanna Stojałowska, doktorantka na Uniwersytecie Szczecińskim. Uważam, że tego typu współpraca jest bardzo wartościowa i pokazuje, że Autor rozprawy potrafi współpracować z matematykami będącymi na podobnym etapie kariery naukowej, poza bezpośredniego nadzoru promotora (który nie jest tutaj współautorem). Oba preprinty zawierają dość szczegółowe studium (hiper)waluacji na hiperciałach i związanych z tym struktur. Część z tych wyników przedstawiona jest w Rozdziale 2.

Rozdział 3 zawiera dalsze studium waluacji na hiperciałach, w szczególności rozszerzając niedawną pracę Tollivera.

Na początku Rozdziału 4 Autor wspomina wspólną pracę z P. Błaszkiwiczem, kolejnym doktorantem (czy też studentem), ale nie ma na ten temat żadnych szczegółów.

Rozdział 4 zawiera oryginalne wyniki zmierzające w kierunku relatywnej eliminacji kwantyfikatorów.

Kontynuację tych badań znajdziemy w Rozdziale 5, gdzie główny wynik (Theorem 5.5) używa techniki ultraproduktów. Spośród zastosowań, Autor dostaje zupełność podstrukturową teorii ciał Henselowskich z waluacją i mieszaną charakterystyką (Corollary 5.32). Nie trzeba dodawać, że Rozdział 5 (prawie 30 stron) zawiera szereg innych nowych wyników wokół własności relatywnej eliminacji kwantyfikatorów.

Rozprawa kończy się dwoma dodatkami zawierającymi dalsze wyjaśnienia niezbędnych pojęć.

Podsumowując, główna część rozprawy to Rozdziały 3 – 5, gdzie można znaleźć szereg oryginalnych wyników rozszerzających znaną dotychczas teorię hiperciał z waluacją, szczególnie jej aspektów teorio-modelowych. Główne twierdzenia są zdecydowanie nietrywialne, często wymagające połączenia kilku technik dowodowych. Mam nadzieję, że Autor przygotowuje przynajmniej jeden nowy artykuł zawierający nowe wyniki, szczególnie te związane z własnością (relatywnej) eliminacji kwantyfikatorów.

**Uwagi krytyczne.** Muszę podkreślić, że rozprawa jest napisana bardzo starannie, bardzo trudno znaleźć jakiegokolwiek literówki. Temat jest ważny i warty dalszego studiowania.

Moja główna krytyka, to brak czytelnych zdań na temat wkładu własnego Autora. Często trudno jest zgadnąć, które wyniki są naprawdę nowe, a które są prostą kombinacją lub przeformułowaniem znanych rezultatów. Własne wyniki Autora rozprawy powinny być zdecydowanie bardziej wyróżnione. Ponadto, rozprawa jest trochę zbyt długa (ponad 130 stron). Być może część materiału można było przenieść na koniec, w formie dodatku, czyniąc cały tekst bardziej czytelny.

Kilka bardziej konkretnych uwag:

1. Strona 3 (15). *Morphism* to podstawowe pojęcie teorii kategorii, zaś w teorii modeli i algebrze standardowa nazwa to *homomorphism*.
2. Strona 23 (35). Nazwa *Groupoid* jest głównie zarezerwowana dla kategorii, w których wszystkie morfizmy są izomorfizmami, oraz dla struktur algebraicznych z częściową operacją dwuargumentową łączną i lokalnie odwracalną. Zbiór z dowolną operacją dwuargumentową jest nazywany *magmą* (ang. *magma*) (choć słowo *grupoid* bywało używane w dawniejszych latach). Autor powinien był raczej użyć *hypermagma*, a przynajmniej dodać ostrzeżenie, że termin „grupoid” ma dwa całkowicie różne znaczenia.
3. Strona 50 (62). Pomijając teorię waluacji, pojęcie ultrametryki jest *zawsze* definiowane przy pomocy bardziej naturalnego porządku, odwrotnego do tego, który został użyty w Definition 3.20. Nie mam nic przeciwko definiowaniu ultrametryki „do góry nogami”, ale komentarz na ten temat jest niezbędny.

4. Strona 63 (75). Autor pisze „These sections contain joint work with P. Błaszkiwicz.” ale nie ma żadnego odnośnika. Czy jest to praca w trakcie redagowania?
5. Strony 121 – 124 (Bibliografia). Pozycje [8], [51] są zaprezentowane niepoprawnie. Ponadto, sprawdziłem, że oba preprinty są dostępne online: <https://math.usask.ca/fvk/CoR.pdf> oraz <https://arxiv.org/abs/1811.08756>. W końcu, jak wspominałem w poprzedniej uwadze, wydaje się, że istnieje wspólna praca A. Linzi, P. Błaszkiwicz, która nie pojawia się w bibliografii w ogóle.

Pragnę dodać, iż powyższe uwagi nie są istotne dla mojej ogólnej pozytywnej opinii na temat wartości rozprawy.

---

**Conclusion.** Rozprawa doktorska autorstwa Alessandro Linzi zawiera nowe i nietrywialne wyniki w całkiem aktywnym i ważnym dziale czystej matematyki. Bez żadnych wahań, wnoszę o dopuszczenie Autora do publicznej obrony.

Bardziej formalnie: Przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustanowione przez Artykuł 187 ust. 1-3 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2022 r. poz. 574 ze zm.).

23 maja 2022



Wiesław Kubiś

Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences