UNIWERSYTET SZCZECIŃSKI
INSTYTUT MATEMATYKI

mgr Malwina Bondarewicz

DYNAMICZNE ZETA FUNKCJE TYPU REIDEMEISTERA

Rozprawa doktorska w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych
w dyscyplinie matematyka
napisana pod kierunkiem dr. hab. prof. US Alexandra Fel'shtyna.

SZCZECIN 2023

Dziękuję mojemu wspaniałemu Promotorowi, prof. Alexandrowi Fel'shtynowi, za ogrom cierpliwości, wyrozumiałość, wiedzę, doświadczenie i nieocenioną pomoc a także mnóstwo poświęconego czasu.

Dziękuję Mamie za trud wychowania i nacisk na zdobywanie wiedzy oraz Mężowi za wsparcie, bez którego ta praca nie mogłaby powstać.

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Od zeta funkcji Hasse–Weila do dynamicznych zeta funkcji

Celem niniejszego paragrafu jest omówienienie pochodzenia dynamicznych zeta funkcji. Z jednej strony są one częścią teorii układów dynamicznych, z drugiej zaś - są ściśle powiązane z geometrią algebraiczną, teorią liczb, topologią i mechaniką statystyczną.

Rozważmy nieosobliwą algebraiczną rozmaitość rzutową V wymiaru n nad skończonym q-elementowym ciałem k. Oznacza to, że V jest zdefiniowana przez jednorodne równania wielomianowe $m + 1$ zmiennych $x_0, x_1, ..., x_m$ o rozwiązaniach znajdujących się w algebraicznym domknięciu $\bar{k}$ ciała k o współczynnikach z k. Zmienne te są współrzędnymi jednorodnymi punktów z V. Rozmaitość V jest niezmiennicza ze względu na odwzorowanie Frobeniusa

$$F : V \to V,$$

$$(x_0, x_1, ..., x_m) \mapsto (x_0^q, x_1^q, ..., x_m^q).$$

Badania odwzorowania Frobeniusa doprowadziły Hassego i Weila do zdefiniowania funkcji zliczającej punkty V o współrzędnych leżących w różnych skończonych rozszerzeniach ciała k. Są to jednocześnie takie punkty V, które są punktami stałymi iteracji F^n dla pewnego $n \geqslant 1$. Zeta funkcja Hasse–Weila została zdefiniowana następująco

$$\zeta(z, V) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#\operatorname{Fix}(F^n)}{n} z^n\right).$$

Zauważmy, że funkcja ta może być zapisana za pomocą iloczynu Eulera

$$\zeta(z,V)=\prod_{\gamma}\frac{1}{1-z^{\#\gamma}},$$

indeksowanego przez wszystkie pierwotne orbity γ odwzorowania F. Dla porównania, iloczyn Eulera dla zeta funkcji Riemanna jest wyrażeniem postaci

$$\zeta(s)=\prod_{p}\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Zauważmy, że z jednej strony zeta funkcja Hasse–Weila $\zeta(z,V)$ jest funkcją wymierną spełniającą równanie funkcyjne i

$$\zeta(z,V)=\prod_{i=0}^{2m}P_l(z)^{(-1)^{l+1}},$$

gdzie wartość bezwzględna miejsc zerowych wielomianu $P_l(z)$ wynosi $q^{-l/2}$ a z drugiej strony wielomian ten ma interpretację kohomologiczną. Mianowicie, jest on wielomianem charakterystycznym stowarzyszonym z indukowanym działaniem odwzorowania Frobeniusa na kohomologii etalnej

$$P_l(z)=\det(1-z\cdot F^*|H^l(V)).$$

1.2 Dynamiczne zeta funkcje

Zainspirowani zeta funkcją Hasse–Weila, Artin i Mazur zdefiniowali zeta funkcję ciągłego odwzorowania $f: X\to X$ przestrzeni topologicznej X następująco

$$F_f(z)=\exp\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{F(f^n)}{n}z^n\right),$$

gdzie $F(f^n)$ oznacza liczbę izolowanych punktów stałych f^n.

Artin i Mazur udowodnili, że dla gęstego zbioru przestrzeni gładkich odwzorowań zwartej gładkiej rozmaitości w siebie zeta funkcja Artina–Mazura $F_f(z)$ ma dodatni promień zbieżności. Następnie, wykorzystując wyniki uzyskane przez Williamsa i Guckenheimera, Manning [40] udowodnił wymierność funkcji zeta Artina–Mazura dla dyfeomorfizmów gładkiej zwartej rozmaitości spełniających aksjomat A Smale'a. Z drugiej strony istnieją także odwzorowania, dla których zeta funkcja Artina–Mazura jest przestępna [7]. Funkcja ta została również użyta do zliczania punktów okresowych kawałkami monotonicznych odwzorowań przedziału przez Milnora i Thurstona [45]. Zeta funkcja Artina–Mazura ma szczególne znaczenie historyczne, ponieważ jest pierwszą zeta funkcją dyskretnego układu dynamicznego.

Kolejną dynamiczną zeta funkcją jest funkcja zdefiniowana przez Smale'a [54]. Jest to zeta funkcja Lefschetza dyskretnego układu dynamicznego

$$L_f(z) = \exp\left(\sum_1^\infty \frac{L(f^n)}{n} z^n\right),$$

gdzie

$$L(f^n) = \sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k \operatorname{tr}\left[f_{*k}^n : H_k(X, \mathbb{Q}) \to H_k(X, \mathbb{Q})\right]$$

jest liczbą Lefschetza odwzorowania f^n, zaś f_{*k} jest homomorfizmem indukowanym na grupie homologii singularnych $H_k(X, \mathbb{Q})$. Smale rozważał zeta funkcję Lefschetza dyfeomorfizmu zwartej rozmaitości, ale jest ona dobrze zdefiniowana także dla dowolnego ciągłego odwzorowania zwartego wielościanu X. Zeta funkcja Lefschetza jest funkcją wymierną i zadaje się wzorem

$$L_f(z) = \prod_{k=0}^{\dim X} \det\left(I - f_{*k} \cdot z\right)^{(-1)^{k+1}}.$$

Zauważmy, że wymienione wyżej funkcje są analogonami zeta funkcji Hasse–Weila. W trakcie badań nad mechaniką statystyczną Ruelle [50] zdefiniował kolejne uogólnienie zeta funkcji Artina–Mazura jako funkcję zliczającą punkty okresowe odwzorowania wraz z przypisanymi im wagami w następujący sposób

$$F_f^g(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n} \sum_{x \in \operatorname{Fix}(f^n)} \prod_{k=0}^{n-1} g(f^k(x))\right),$$

gdzie $g : X \to \mathbb{C}$ jest funkcją wagi. Oczywiście jeśli $g \equiv 1$, to otrzymamy zeta funkcję Artina–Mazura $F_f(z)$.

1.3 Dynamiczne zeta funkcje a teoria Nielsena–Reidemeistera punktu stałego

W przeciwieństwie do zeta funkcji Artina–Mazura, która liczy punkty okresowe odwzorowania f geometrycznie, zeta funkcja Lefschetza robi to algebraicznie. Można jednak także zliczać punkty stałe odwzorowania $f^n, n \geqslant 1$ w sposób zaproponowany przez Nielsena i Reidemeistera oparty na wykorzystaniu grupy podstawowej przestrzeni X.

Niech $f : X \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym przestrzeni topologicznej X posiadającej nakrycie uniwersalne $p : \tilde{X} \to X$, zaś $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ niech będzie podniesieniem odwzorowania f, tj. $p \circ \tilde{f} = f \circ p$. Dwa podniesienia $\tilde{f}$ oraz $\tilde{f}'$ nazywamy *sprzężonymi*, jeśli istnieje przesunięcie nakrycia γ takie, że $\tilde{f}' = \gamma \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$. Podzbiór $p(Fix(\tilde{f})) \subset Fix(f)$ nazywamy *klasą punktu stałego odwzorowania f wyznaczoną przez klasę podniesienia* $[\tilde{f}]$. Klasę punktu stałego nazywamy *istotną*, jeśli jej indeks topologiczny jest niezerowy. Liczbę wszystkich klas podniesienia f (rozumianą także jako liczbę klas punktów stałych) nazywamy *liczbą Reidemeistera* odwzorowania f i oznaczamy przez $R(f)$. Jest to dodatnia liczba całkowita lub nieskończoność. Z kolei liczbę klas istotnych punktów stałych nazywamy *liczbą Nielsena* odwzorowania f i oznaczamy przez $N(f)$. Liczba Nielsena jest zawsze skończona. Zarówno $R(f)$, jak i $N(f)$ są niezmiennikami homotopijnymi.

W kategorii zwartych spójnych wielościanów liczba Nielsena odwzorowania jest równa najmniejszej liczbie punktów stałych odwzorowań o takim samym typie homotopijnym jak f. W teorii punktów stałych Nielsena–Reidemeistera głównymi obiektami badań są liczby Nielsena i Reidemeistera.

Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem grupy G. Dwa elementy $\alpha, \alpha' \in G$ nazywamy $\phi - sprzężonymi$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element $\gamma \in G$ taki, że $\alpha' = \gamma\alpha\phi(\gamma)^{-1}$. Liczbę klas ϕ-sprzężoności nazywamy *liczbą Reidemeistera* endomorfizmu ϕ i oznaczamy przez $R(\phi)$. Liczba Reidemeistera ciągłego odwzorowania f jest równa liczbie Reidemeistera (tj. liczbie klas skręconej sprzężoności) indukowanego endomorfizmu f_* grupy podstawowej przestrzeni X, tzn. $R(f) = R(f_*)$.

W [15, 16, 17, 18] A. Fel'shtyn wprowadził nowe dynamiczne zeta funkcje związane z teorią punktów stałych Nielsena–Reidemeistera. Były to *zeta funkcja Nielsena* $N_f(z)$ odwzorowania f przestrzeni X

$$N_f(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N(f^n)}{n} z^n\right),$$

zeta funkcja Reidemeistera $R_f(z)$ odwzorowania f przestrzeni X

$$R_f(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(f^n)}{n} z^n\right)$$

oraz *zeta funkcja Reidemeistera* $R_\phi(z)$ endomorfizmu ϕ grupy G.

$$R_\phi(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(\phi^n)}{n} z^n\right).$$

Za każdym razem, gdy będziemy rozważać zeta funkcje Reidemeistera odwzorowania f lub endomorfizmu ϕ, to będziemy zakładać, że $R(f^n) < \infty$ oraz $R(\phi^n) < \infty$ dla wszystkich $n > 0$. Endomorfizmy o takiej własności nazywać będziemy *oswojonymi*.

Spośród zagadnień związanych z badaniem własności zeta funkcji Nielsena i Reidemeistera możemy wyróżnić kilka szczególnie interesujących nas problemów. Dla jakich przestrzeni lub grup oraz ich odwzorowań zeta funkcje Reidemeistera i Nielsena są wymierne? Czy i kiedy spełniają równanie funkcyjne? Czy są one funkcjami algebraicznymi?

W [15] zostało udowodnione, że zeta funkcja Nielsena ma dodatni promień zbieżności i wyprowadzono dla niego dokładne oszacowanie za pomocą topologicznej entropii odwzorowania. Z kolei w [48] wykazano, że zeta funkcja Nielsena zachowującego orientację homeomorfizmu powierzchni zwartej jest albo wymierna, albo jest pierwiastkiem z funkcji wymiernej. W tej samej pracy wykazano również, że dla okresowego odwzorowania dowolnego zwartego wielościanu, zeta funkcja Nielsena jest pierwiastkiem z funkcji wymiernej.

Warto zaznaczyć, że rezultaty dotyczące zeta funkcji Reidemeistera endomorfizmu grupy $R_\phi(z)$ stanowią algebraiczne podstawy do badań dotyczących zeta funkcji Reidemeistera $R_f(z)$ i zeta funkcji Nielsena $N_f(z)$ ciągłego odwzorowania przestrzeni topologicznej. W przypadku, gdy zeta funkcja Reidemeistera jest funkcją wymierną, to nieskończony ciąg współczynników tworzącego ją szeregu potęgowego jest zdefiniowany przez skończony zbiór jej miejsc zerowych i biegunów. W [18] badano właściowości zeta funkcji Reidemeistera endomorfizmu rozszerzenia grupy G. Wymierność zeta funkcji Reidemeistera $R_\phi(z)$ została udowodniona w pewnych sytuacjach. W [18, 19, 20, 22, 36] wykazano ją dla grup skończonych, grup będących sumą prostą grupy skończonej i skończenie generowanej wolnej grupy abelowej, dla skończenie generowanych beztorsyjnych grup nilpotentnych a także dla endomorfizmów ϕ skończenie generowanej grupy G o takiej własności, że podgrupa $\phi^n(G)$ jest przemienna dla pewnego $n \geqslant 1$. W [57] wymierność zeta funkcji Reidemeistera udowodniono dla endomorfizmów grupy podstawowej infra-nilrozmaitości spełniającej pewne dodatkowe warunki. Rezultat ten został wzmocniony w [10] i wymierność $R_\phi(z)$ wykazano dla endomorfizmów grupy podstawowej dowolnej infra-nilrozmaitości. W [24] wymierność $R_\phi(z)$ udowodniono dla endomorfizmów grupy podstawowej infra-solvrozmaitości typu (R). W [11] wykazano ją dla automorfizmów grup krystalograficznych z holonomią diagonalną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oraz automorfizmów grup prawie krystalograficznych aż do wymiaru 3. W [55] wymierność zeta funkcji Reidemeistera została udowodniona dla prawostronnych przesunięć nieabelowej nieskończenie generowanej grupy torsyjnej $G = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} F_i$, gdzie $F_i \cong F$, zaś F jest skończoną grupą nieabelową. Z kolei w [19] zostały sformułowane warunki, jakie są wystarczające na to, aby zeta funkcja Nielsena mogła być utożsamiona z zeta funkcją Reidemeistera i tym samym była funkcją wymierną spełniającą równanie funkcyjne. Zastosowanie tego rezultatu pozwoliło wyznaczyć wzory na zeta funkcje Nielsena i Reidemeistera dowolnych odwzorowań przestrzeni soczewkowych, nilrozmaitości i torusa w siebie. Ponadto w [17, 18, 32] znaleziono związek pomiędzy wymiernością zeta funkcji Nielsena i Reidemeistera odwzorowania włókna, bazy i przestrzeni totalnej wiązki Serre'a. W [31] udowodniliśmy dychotomię Pólyi–Carlsona pomiędzy wymiernością a istnieniem brzegu naturalnego zeta funkcji Reidemeistera automorfizmów nieskończenie generowanych beztorsyjnych grup abelowych będących podgrupami w $\mathbb{Q}^d, d \geqslant 1$.

Niech $\phi, \psi : G \to G$ będą endomorfizmami grupy G. Elementy $\alpha, \beta \in G$ nazywamy $(\phi, \psi) - sprzężonymi$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element $\gamma \in G$ taki, że

$$\beta = \psi(\gamma)\alpha\phi(\gamma^{-1}).$$

Liczbę klas (ϕ, ψ)-sprzężoności nazywamy *liczbą Reidemeistera koincydencji* endomorfizmów ϕ oraz ψ i oznaczamy ją przez $R(\phi, \psi)$. Jeśli $\psi = id$, to klasy (ϕ, id)-sprzężoności są po prostu klasami ϕ-sprzężoności grupy G oraz $R(\phi, id) = R(\phi)$. Liczby Reidemeistera koincydencji $R(\phi, \psi)$ znajdują zastosowanie także między innymi w topologicznej teorii koincydencji Nielsena–Reidemeistera.

Parę endomorfizmów (ϕ, ψ) będziemy nazywać *oswojoną*, jeśli $R(\phi^n, \psi^n) < \infty$ dla każdego $n > 0$. Dla pary oswojonych endomorfizmów możemy zdefiniować *zeta funkcję Reidemeistera koincydencji* następująco

$$R_{\phi,\psi}(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(\phi^n, \psi^n)}{n} z^n\right).$$

Oczywiście jeżeli $\psi = id$, to $R_{\phi,id}(z) = R_\phi(z)$. Z punktu widzenia teorii układów dynamicznych zeta funkcja Reidemeistera koincydencji zlicza punkty synchronizacji dwóch odwzorowań, tzn. punkty, których orbity przecinają się podczas jednoczesnej iteracji dwóch odwzorowań. Bardziej szczegółowy opis tej sytuacji znaleźć można np. w [44].

W [30] udowodniliśmy dychotomię Pólyi–Carlsona między wymiernością a istnieniem brzegu naturalnego zeta funkcji Reidemeistera oswojonej pary komutujących endomorfizmów nieskończenie generowanych beztorsyjnych grup abelowych będących podgrupami w $\mathbb{Q}^d, d \geqslant 1$.

1.4 Dynamiczne zeta funkcje teorii reprezentacji

Rozważmy endomorfizm $\phi : G \to G$ dyskretnej grupy G wraz z jej unitarnymi nieprzywiedlnymi reprezentacjami ρ. Niech $\widehat{G}$ oznacza *przestrzeń unitarno-dualną* grupy G, tj. przestrzeń klas równoważności unitarnych nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G wyposażoną w topologię Jacobsona, $\widehat{G}_f$ będzie podprzestrzenią przestrzeni unitarno-dualnej składającą się z nieprzywiedlnych skończenie wymiarowych reprezentacji, zaś przez $\widehat{G}_{ff}$ oznaczmy podprzestrzeń przestrzeni $\widehat{G}_f$ składającą się z reprezentacji *skończonych*.

W ogólności odwzorowanie $\widehat{\phi} : \rho \mapsto \rho \circ \phi$ nie musi definiować układu dynamicznego (tj. działania półgrupy $\mathbb{Z}_+$) na żadnej z przestrzeni $\widehat{G}$, $\widehat{G}_f$, $\widehat{G}_{ff}$, ponieważ o ile nie zakładamy, że jest to automorfizm grupy, reprezentacja $\rho \circ \phi$ może być przywiedlna. Wtedy możemy jedynie rozłożyć $\rho \circ \phi$ na nieprzywiedlne składniki i w ten sposób otrzymać odwzorowanie wielowartościowe $\widehat{\phi}$. Możemy jednak rozpatrzyć takie nieprzywiedlne reprezentacje ρ, dla których $\rho \sim \rho \circ \phi$.

W [29] *liczbę Reidemeistera teorii reprezentacji* $RT(\phi)$ zdefiniowaliśmy jako liczbę wszystkich $[\rho] \in \widehat{G}$ takich, że $\rho \sim \rho \circ \phi$. Dla $[\rho] \in \widehat{G}_f$ oraz $[\rho] \in \widehat{G}_{ff}$ definiujemy $RT^f(\phi)$ oraz $RT^{ff}(\phi)$) analogicznie. Oczywiście $RT(\phi) \geqslant RT^f(\phi) \geqslant RT^{ff}(\phi)$. *Dynamiczne zeta funkcje teorii reprezentacji* $RT_\phi(z), RT_\phi^f(z)$ oraz $RT_\phi^{ff}(z)$ zostały zdefiniowane w następujący sposób

$$RT_\phi(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{RT(\phi^n)}{n} z^n\right),$$
$$RT_\phi^f(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{RT^f(\phi^n)}{n} z^n\right),$$
$$RT_\phi^{ff}(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{RT^{ff}(\phi^n)}{n} z^n\right).$$

W każdym z tych przypadków zakładamy, że wszystkie liczby Reidemeistera teorii reprezentacji są skończone dla każdego $n \geqslant 1$ [29].

Choć mogłoby się wydawać, że różnice pomiędzy tymi funkcjami są niewielkie, to rozróżnienie trzech rodzajów współczynników jest uzasadnione z punktu widzenia teorii układów dynamicznych [29]. Klasę równoważności $[\rho]$ nazywamy *$\widehat{\phi}$-**f**-punktem*, jeżeli $\rho \sim \rho \circ \phi$. Element $[\rho] \in \widehat{G}$ (oraz $\widehat{G}_f$, $\widehat{G}_{ff}$ odpowiednio) nazywamy *ϕ-nieprzywiedlnym*, jeżeli reprezentacja $\rho \circ \phi^n$ jest nieprzywiedlna dla wszystkich $n \geqslant 0$. Oznaczmy przez $\widehat{G}^\phi$ (oraz $\widehat{G}_f^\phi$, $\widehat{G}_{ff}^\phi$ odpowiednio) ϕ-nieprzywiedlne podprzestrzenie przestrzeni $\widehat{G}$ (oraz $\widehat{G}_f$, $\widehat{G}_{ff}$ odpowiednio). Dobrze określony układ dynamiczny istnieje zarówno na $\widehat{G}^\phi$ jaki i na $\widehat{G}_f^\phi$ oraz $\widehat{G}_{ff}^\phi$. Jego punkty n-okresowe są równocześnie $\widehat{\phi}^n$-**f**-punktami. W [27] znajduje się zarówno dowód tego faktu, jak i dalsze szczegóły.

Niech $AM^f(\phi^n)$ oznacza liczbę *izolowanych* punktów n-okresowych (tj. *izolowanych* $\widehat{\phi}^n$-**f**-punktów) układu dynamicznego $(\widehat{\phi})^n$ na $\widehat{G}_f^\phi$. Przy założeniu, że $AM^f(\phi^n) < \infty$

dla każdego $n \geqslant 1$, w [30] zdefiniowaliśmy zeta funkcję Artina–Mazura reprezentacji następująco

$$AM_{\phi}^{f}(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{AM^{f}(\phi^{n})}{n} z^{n}\right).$$

W [30, 31] udowodniliśmy wymierność oraz wyprowadziliśmy równanie funkcyjne dla dynamicznych zeta funkcji teorii reprezentacji endomorfizmów skończenie generowanych grup abelowych, endomorfizmów skończenie generowanych beztorsyjnych grup nilpotentnych, endomorfizmów grup ze skończonymi ϕ-nieprzywiedlnymi podprzestrzeniami odpowiedniej przestrzeni unitarno-dualnej oraz automorfizmów grup krystalograficznych z holonomią diagonalną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dla okresowych automorfizmów dowolnej grupy przedstawiliśmy dynamiczną zeta funkcję teorii reprezentacji jako skończony iloczyn pierwiastków z funkcji wymiernych. W [30, 31] badaliśmy również powiązania pomiędzy zeta funkcją Reidemeistera a dynamiczną zeta funkcją teorii reprezentacji obcięcia endomorfizmu do podgrupy oraz indukowanego na grupie ilorazowej.

1.5 Wyniki rozprawy

Niech $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ oznacza zbiór skończonych miejsc algebraicznego ciała liczbowego $\mathbb{K}$. Miejscami ciała $\mathbb{K}$ nazywamy klasy równoważności wartości bezwzględnych zdefiniowanych na $\mathbb{K}$. Gdy $char(\mathbb{K}) = 0$, nieskończone miejsca są miejscami archimedesowymi. Wszystkie pozostałe miejsca są skończone. Dla danego skończonego miejsca ciała $\mathbb{K}$ istnieje wyznaczona jednoznacznie dyskretna waluacja v, której grupą waluacyjną jest $\mathbb{Z}$. Odpowiadająca jej znormalizowana wartość bezwzględna to $|\cdot|_v = |\mathcal{R}_v|^{-v(\cdot)}$, gdzie przez $\mathcal{R}_v$ rozumiemy ciało reszt waluacji v. Niech dla dowolnego zbioru miejsc S, $|x|_S = \prod_{v \in S} |x|_v$.

Jednym z głównych wyników niniejszej pracy są następujące wzory na liczby Reidemeistera oraz udowodnienie dychotomii Pólyi–Carlsona pomiędzy wymiernością a istnieniem brzegu naturalnego zeta funkcji Reidemeistera.

Twierdzenie 1.5.1. (Twierdzenie 2.3.10) Niech $\phi : G \to G$ będzie automorfizmem przeliczalnej grupy abelowej G będącej podgrupą w $\mathbb{Q}^d$, gdzie $d \geqslant 1$. Załóżmy, że G jako $R = \mathbb{Z}[t]$-moduł spełnia następujące warunki:

(1) Zbiór stowarzyszonych ideałów pierwszych $\mathrm{Ass}(G)$ jest skończony i składa się wyłącznie z niezerowych ideałów głównych pierścienia wielomianów $R = \mathbb{Z}[t]$.

(2) Odwzorowanie $g \to (t^j - 1)g$ jest monomorfizmem grupy G dla $j \in \mathbb{N}$ (równoważnie $t^j - 1 \notin \mathfrak{p}$ dla każdego $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(G)$ i dla każdego $j \in \mathbb{N}$).

(3) Dla każdego $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(G)$, $m(\mathfrak{p}) = \dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{p})} G_{\mathfrak{p}} < \infty$, gdzie $\mathbb{K}(\mathfrak{p})$ oznacza ciało ułamków pierścienia $R/\mathfrak{p}$, zaś $G_{\mathfrak{p}} = G \otimes_R K(\mathfrak{p})$.

Wtedy istnieją algebraiczne ciała liczbowe $\mathbb{K}_1, \ldots, \mathbb{K}_n$, zbiory skończonych miejsc $P_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{K}_i)$, $S_i = \mathcal{P}(\mathbb{K}_i) \setminus P_i$, oraz elementy $\xi_i \in \mathbb{K}_i$, z których żaden nie jest pierwiastkiem z jedynki takie, że

$$R(\phi^j) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{v \in P_i} |\xi_i^j - 1|_v^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - 1|_{P_i}^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - 1|_{P_i^\infty \cup S_i} \tag{1.1}$$

dla każdego $i = 1, \ldots, n$ i dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$. Załóżmy ponadto, że w ostatnim iloczynie równości (1.1) występuje tylko skończenie wiele miejsc oraz $|\xi_i|_v \neq 1$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$ i dla każdego v w zbiorze nieskończonych miejsc P_i^∞ ciała $\mathbb{K}_i$. Wtedy zeta funkcja Reidemeistera $R_\phi(z)$ jest albo funkcją wymierną, albo okrąg jednostkowy jest jej brzegiem naturalnym, przy czym druga sytuacja zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|\xi_i|_v = 1$ dla pewnego $v \in S_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Następnie dowodzimy dychotomii Pólyi–Carlsona między wymiernością a istnieniem naturalnego brzegu zeta funkcji Reidemeistera endomorfizmów grup abelowych $\mathbb{Z}_p^d$, $d \geqslant 1$, gdzie $\mathbb{Z}_p$ oznacza grupę p-adycznych liczb całkowitych.

Twierdzenie 1.5.2. (Twierdzenie 3.0.4) Niech $\phi_p : \mathbb{Z}_p^d \to \mathbb{Z}_p^d$ będzie endomorfizmem oswojonym oraz $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_d \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ będą wartościami własnymi macierzy Φ_p endomorfizmu ϕ_p, licząc wraz z krotnościami. Wówczas zeta funkcja Reidemeistera $R_{\phi_p}(z)$ jest albo funkcją wymierną, albo okrąg jednostkowy jest jej brzegiem naturalnym. Przy czym drugi przypadek zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|\lambda_i|_p = 1$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Kolejny główny rezultat opisuje wzór na liczby Reidemeistera koincydencji oraz dychotomię Pólyi–Carlsona pomiędzy wymiernością a istnieniem brzegu naturalnego zeta funkcji Reidemeistera koincydencji.

Twierdzenie 1.5.3. (Twierdzenie 5.1.1) Niech $\phi, \psi : G \to G$ będą komutującymi endomorfizmami przeliczalnej grupy abelowej G będącej podgrupą w $\mathbb{Q}^d$, gdzie $d \geqslant 1$. Załóżmy, że G jako $R = \mathbb{Z}[t_\phi, t_\psi]$- moduł spełnia następujące warunki.

(1) Zbiór stowarzyszonych ideałów pierwszych $\mathrm{Ass}(G)$ jest skończony i składa się wyłącznie z niezerowych ideałów głównych pierścienia wielomianów $R = \mathbb{Z}[t_\phi, t_\psi]$.

(2) Odwzorowanie $g \to (t_\phi^j - t_\psi^j)g$ jest monomorfizmem grupy G dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$ (równoważnie $t_\phi^j - t_\psi^j \notin \mathfrak{p}$ dla każdego $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(G)$ i dla każdego $j \in \mathbb{N}$).

(3) Dla każdego $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(G)$, $m(\mathfrak{p}) = \dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{p})} G_\mathfrak{p} < \infty$, gdzie $\mathbb{K}(\mathfrak{p})$ oznacza ciało ułamków pierścienia $R/\mathfrak{p}$, zaś $G_\mathfrak{p} = G \otimes_R K(\mathfrak{p})$.

Wtedy istnieją algebraiczne ciała liczbowe $\mathbb{K}_1, \ldots, \mathbb{K}_n$, zbiory skończonych miejsc $P_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{K}_i)$, $S_i = \mathcal{P}(\mathbb{K}_i) \setminus P_i$, elementy $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{K}_i$, $\xi_i^j \neq \eta_i^j$, $i = 1, \ldots, n$ takie, że

$$R(\phi^j, \psi^j) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{v \in P_i} |\xi_i^j - \eta_i^j|_v^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - \eta_i^j|_{P_i}^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - \eta_i^j|_{P_i^\infty \cup S_i} \tag{1.2}$$

dla każdego $j \in \mathbb{N}$.

Załóżmy dodatkowo, że w ostatnim iloczynie równości (1.2) występuje tylko skończenie wiele miejsc oraz że $|\xi_i|_v \neq |\eta_i|_v$ dla wszystkich v w zbiorze nieskończonych miejsc P_i^∞ ciała $\mathbb{K}_i$, gdzie $i = 1, \ldots, n$. Wtedy zeta funkcja Reidemeistera koincydencji $R_{\phi,\psi}(z)$ jest albo wymierna, albo okrąg zbieżności jest naturalnym brzegiem tej funkcji, przy czym druga sytuacja zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|\xi_i|_v = |\eta_i|_v$ dla pewnego $v \in S_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

W rozdziale 6 dowodzimy wymierności zeta funkcji Reidemeistera koincydencji oswojonej pary endomorfizmów skończenie generowanej beztorsyjnej grupy nilpotentnej.

Twierdzenie 1.5.4. (Twierdzenie 6.0.5) Niech $\phi, \psi \colon N \to N$ będzie parą oswojonych endomorfizmów skończenie generowanej beztorsyjnej nilpotentnej stopnia c grupy N. Przez $\phi_k, \psi_k \colon G_k \to G_k$, $1 \leqslant k \leqslant c$ oznaczmy oswojone endomorfizmy indukowane na skończenie generowanych beztorsyjnych abelowych grupach ilorazowych

$$G_k = N_k/N_{k+1} = \sqrt[N]{\gamma_k(N)}/\sqrt[N]{\gamma_{k+1}(N)} \cong \mathbb{Z}^{d_k}$$

pochodzących z dostosowanego dolnego ciągu centralnego grupy N dla pewnego $d_k \in \mathbb{N}$, gdzie $\sqrt[N]{\gamma_k(N)}$ jest izolatorem k-tego komutatora w grupie N. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

(1) $R(\phi^n, \psi^n) = \prod_{k=1}^{c} R(\phi_k^n, \psi_k^n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(2) Niech
$$\phi_{k,\mathbb{Q}}, \psi_{k,\mathbb{Q}} \colon G_{k,\mathbb{Q}} \to G_{k,\mathbb{Q}}, 1 \leqslant k \leqslant c$$
oznaczają przedłużenia endomorfizmów ϕ_k, ψ_k do $G_{k,\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G_k \cong \mathbb{Q}^{d_k}$ grupy G_k. Załóżmy, że każda para endomorfizmów $\phi_{k,\mathbb{Q}}, \psi_{k,\mathbb{Q}}$ jest jednocześnie diagonalizowalna. Niech ponadto $\xi_{k,1}, \ldots, \xi_{k,d_k}$ i $\eta_{k,1}, \ldots, \eta_{k,d_k}$ będą zespolonymi wartościami własnymi $\phi_{k,\mathbb{Q}}$ oraz $\psi_{k,\mathbb{Q}}$ licząc z krotnościami, uporządkowanych w taki sposób, że wartościami własnymi odwzorowań $\phi^n_{k,\mathbb{Q}} - \psi^n_{k,\mathbb{Q}}$ są $\xi^n_{k,1} - \eta^n_{k,1}, \ldots, \xi^n_{k,d_k} - \eta^n_{k,d_k}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy
$$R(\phi^n_k, \psi^n_k) = \prod_{i=1}^{d_k} |\xi^n_{k,i} - \eta^n_{k,i}|$$
dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(3) Załóżmy ponadto, że $|\xi_{k,i}| \neq |\eta_{k,i}|$ dla $1 \leqslant k \leqslant c$, $1 \leqslant i \leqslant d_k$. Jeśli ϕ, ψ jest oswojoną parą endomorfizmów grupy N oraz $\phi_{k,\mathbb{Q}}, \psi_{k,\mathbb{Q}}$, $1 \leqslant k \leqslant c$ są jednocześnie diagonalizowalnymi parami endomorfizmów grupy $G_{k,\mathbb{Q}}$, to zeta funkcja Reidemeistera koincydencji $R_{\phi,\psi}(z)$ jest funkcją wymierną.

Niech teraz $Z(\phi)$ oznacza jedną z liczb $RT(\phi)$, $RT^f(\phi)$, $RT^{ff}(\phi)$, $AM^f(\phi)$ oraz
$$Z_\phi(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z(\phi^n)}{n} z^n\right)$$
będzie jedną z zeta funkcji $AM^f_\phi(z)$, $RT_\phi(z)$, $RT^f_\phi(z)$, $RT^{ff}_\phi(z)$.

Twierdzenie 1.5.5. (Twierdzenie 7.3.1) Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem skończenie generowanej grupy abelowej. Wtedy
$$Z(\phi^n) =\mid L(\hat{\phi}^n) \mid,$$
gdzie $L(\hat{\phi}^n)$ jest liczbą Lefschetza odwzorowania $\hat{\phi} : \hat{G} \to \hat{G}$. Wynika z tego, że zeta funkcja $Z_\phi(z)$ jest wymierna oraz
$$Z_\phi(z) = L_{\hat{\phi}}(\sigma z)^{(-1)^r},$$
gdzie p jest liczbą rzeczywistych wartości własnych $\lambda \in \mathrm{Spectr}(\phi^\infty)$ takich, że $\lambda < -1$, zaś $\sigma = (-1)^p$ oraz r jest liczbą rzeczywistych wartości własnych $\lambda \in \mathrm{Spectr}(\phi^\infty)$ takich, że $\mid \lambda \mid > 1$. Jeśli ponadto G jest skończona, to
$$Z(\phi^n) = L(\hat{\phi}^n) \text{ i } Z_\phi(z) = L_{\hat{\phi}}(z).$$

Twierdzenie 1.5.6. (Twierdzenie 7.0.4) Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem grupy G. Załóżmy, że przestrzeń $\widehat{G}^\phi$ (oraz $\widehat{G}^\phi_f$, $\widehat{G}^\phi_{ff}$ odpowiednio) jest skończona. Wtedy zeta funkcja $RT_\phi(z)$ jest wymierna i spełnia równanie funkcyjne

$$RT_\phi\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^a z^b RT_\phi(z),$$

gdzie a oznacza liczbę pierwotnych $\widehat{\phi}$-orbit okresowych elementów z $\widehat{G}^\phi$, zaś b jest liczbą elementów okresowych odwzorowania $\hat{\phi}$ przestrzeni $\widehat{G}^\phi$. W szczególności

$$RT_\phi(z) = \prod_{[\gamma]} \frac{1}{1 - z^{\#[\gamma]}},$$

gdzie powyższy iloczyn jest indeksowany przez pierwotne orbity okresowe układu dynamicznego $(\widehat{\phi})^n$ na $\widehat{G}^\phi$. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla $RT^f_\phi(z)$, $RT^{ff}_\phi(z)$ oraz $AM^f_\phi(z)$.

W rozdziale 8 badamy związek między zeta funkcją Reidemeistera a dynamiczną zeta funkcją teorii reprezentacji endomorfizmu obciętego do podgrupy H grupy G oraz endomorfizmu indukowanego na grupie ilorazowej G/N, gdzie N oznacza podgrupę normalną składającą się z elementów nilpotentnych grupy G.

Twierdzenie 1.5.7. (Twierdzenie 8.1.4) Niech G będzie rozszerzeniem grupy abelowej o grupę skończoną, zaś $\phi : G \to G$ będzie jej endomorfizmem. Rozważmy podgrupę H grupy G, taką że $\phi(H) \subset H$ oraz dla każdego $x \in G$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\phi^n(x) \in H$. Załóżmy ponadto, że $R(\phi^k)$ oraz $Z(\phi^k)$ są skończone dla każdego $k \in N$. Jeżeli spełniony jest jeden z poniższych warunków:

(1) H jest skończenie generowaną grupą abelową,

(2) H jest grupą skończoną,

(3) H jest grupą krystalograficzną z holonomią diagonalną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

oraz ϕ_H jest automorfizmem, to

$$R_\phi(z) = R_{\phi_H}(z) = Z_{\phi_H}(z) = Z_\phi(z)$$

i są one funkcjami wymiernymi.

Przy założeniu, że $Z(\phi)$ oznacza jedną z liczb $RT^f(\phi), RT^{ff}(\phi)$ otrzymaliśmy poniższy rezultat.

Twierdzenie 1.5.8. (Twierdzenie 8.2.2) Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem grupy G. Zbiór N wszystkich elementów nilpotentnych grupy G jest jej podgrupą normalną. Ponadto $\phi(N) \subset N$ i $\phi^{-1}(N) = N$. Stąd ϕ indukuje endomorfizm $[\phi/N]$ grupy ilorazowej G/N określony wzorem $[\phi/N](xN) = \phi(x)N$. Endomorfizm $[\phi/N] : G/N \to G/N$ jest injektywny oraz zachodzą równości

$$R(\phi) = R([\phi/N]), \quad Z(\phi) = Z([\phi/N]).$$

Niech $R(\phi^n)$ i $Z(\phi^n)$ będą skończone dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$R_\phi(z) = R_{[\phi/N]}(z), \quad Z_\phi(z) = Z_{[\phi/N]}(z).$$

Jeśli grupa ilorazowa G/N jest policykliczna, to dla liczb Reidemeistera zachodzą następujące kongruencje Gaussa:

$$\sum_{d|n} \mu(d) \cdot R(\phi^{n/d}) \equiv 0 \mod n$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie μ jest funkcją Möbiusa. Jeśli ponadto spełniony jest jeden z następujących warunków

(1) grupa ilorazowa G/N jest skończenie generowaną grupą abelową,

(2) G/N jest grupą skończoną,

(3) G/N jest skończenie generowaną beztorsyjną grupą nilpotentną,

(4) G/N jest grupą krystalograficzną z holonomią diagonalną $\mathbb{Z}_2$ i $[\phi/N]$ jest jej automorfizmem,

to

$$R_\phi(z) = R_{[\phi/N]}(z) = Z_{[\phi/N]}(z) = Z_\phi(z)$$

i funkcje te są wymierne.

Rozdział 2

Dychotomia Pólyi – Carlsona zeta funkcji Reidemeistera automorfizmów nieskończenie generowanych podgrup $\mathbb{Q}^d, d \geqslant 1$

2.1 Podstawy algebraiczne

W poniższym rozdziale zaprezentujemy wyniki dotyczące dychotomii Pólyi–Carlsona dla zeta funkcji Reidemeistera endomorfizmu grupy abelowej. Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem przeliczalnej grupy abelowej G będącej podgrupą w $\mathbb{Q}^d$, $d \geqslant 1$. Niech ponadto $R = \mathbb{Z}[t]$ będzie pierścieniem wielomianów. Wtedy grupa G jest naturalnie wyposażona w strukturę R-modułu nad pierścieniem $R = \mathbb{Z}[t]$, gdzie mnożeniu przez t odpowiada zastosowanie endomorfizmu $tg = \phi(g)$ i rozszerzenie go w naturalny sposób na wielomiany. Oznacza to, że dla elementu $g \in G$ i $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n \in R = \mathbb{Z}[t]$ definiujemy

$$fg = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \phi^n(g),$$

gdzie wszystkie, poza skończoną ilością, współczynniki $c_n \in \mathbb{Z}$ są równe zeru. Jest to standardowa procedura, szerzej opisana w [51].

2.2 Podgrupy addytywnej grupy liczb wymiernych.

W celu zilustrowania pewnych idei używanych do dowodu twierdzenia 2.3.10 w przypadku ogólnym, tj. gdy G jest podgrupą w $\mathbb{Q}^d$ dla $d \geqslant 1$, rozważmy oddzielnie przypadek, gdy $d = 1$. Podgrupy tego typu można sklasyfikować w następujący sposób [2]. Niech H będzie addytywną podgrupą w $\mathbb{Q}$, zaś przez $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ oznaczmy zbiór liczb pierwszych. Wtedy p-*wysokość* elementu $x \in H \setminus \{0\}$ definiujemy jako

$$h_p(x) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid p^n y = x \text{ ma rozwiązanie } y \in H\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

zaś ciąg $h(x) = (h_p(x))_{p \in \mathbb{P}} \in \{\mathbb{N} \cup \{\infty\}\}^{\mathbb{N}}$ nazywamy *charakterystyką elementu* x. Dwa ciągi wysokości nazywamy *równoważnymi*, jeśli różnią się tylko skończoną liczbą wyrazów oraz jeśli w jednym z nich występuje nieskończoność, to w drugim także. Klasy równoważności ciągów wysokości nazywamy *typami*. Zauważmy, że jeżeli $x, y \in H \setminus \{0\}$, to $h(x)$ i $h(y)$ należą do tego samego typu. Zdefiniujmy zatem *typ* H jako typ dowolnego niezerowego elementu z H i oznaczmy przez $h(H)$. Z drugiej strony, mając dany ciąg $(h_p)_{p \in \mathbb{P}}$ taki, że $h_p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, możemy zdefiniować addytywną podgrupę w $\mathbb{Q}$ następująco

$$H((h_p)_{p \in \mathbb{P}}) = \{\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) = 1, ord_p(b) \leqslant k_p \text{ dla każdego } p \in \mathbb{P}\}.$$

Twierdzenie 2.2.1. (Baer) [2] Każda podgrupa w $\mathbb{Q}$ jest postaci $H((h_p)_{p \in \mathbb{P}})$ dla pewnego $(h_p) \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})^{\mathbb{N}}$. Dwie podgrupy w $\mathbb{Q}$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego typu.

Zauważmy, że jedynymi endomorfizmami H są odwzorowania postaci $x \mapsto \frac{a}{b}x$ gdzie $(a, b) = 1$ oraz $h_p(H) = \infty$ dla każdego p dzielącego b. Oznaczmy zbiór p takich, że $h_p(H) = \infty$ przez $\mathcal{S}(H)$.

Przykład 2.2.2. Przykłady:

(1) $H((\infty)_{p \in \mathbb{P}}) = \mathbb{Q}$,

(2) $H((0)_{p \in \mathbb{P}}) = \mathbb{Z}$,

(3) $H((\infty, \infty, 0, 0, \dots)) = \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$,

(4) $H((0, 1, 1, 1, 1, \dots))$ jest podgrupą w $\mathbb{Q}$ składającą się z liczb o nieparzystych bezkwadratowych mianownikach,

(5) dla podzbioru $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}$ istnieje stowarzyszona z nim podgrupa liczb $\mathcal{S}$-całkowitych $R_{\mathcal{S}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x|_p \leqslant 1 \text{ for all } p \notin \mathcal{S}\} = \mathbb{Z}[\frac{1}{p} : p \in \mathcal{S}] = H((h_p)_{p\in\mathbb{P}})$ gdzie $h_p = \infty$ jeśli $p \in S$ i $h_p = 0$ w przeciwnym przypadku.

Twierdzenie 2.2.3. Niech $\phi : H \to H$ będzie monomorfizmem podgrupy $H \leqslant \mathbb{Q}$. Podgrupa H może być traktowana jako ideał ułamkowy dziedziny $D = \mathbb{Z}[\xi] \subset \mathbb{Q}$. Wtedy liczby Reidemeistera $R(\phi^j)$ zależą tylko wyboru $\xi \in \mathbb{Q}$ oraz zbioru T składającego się takich $p \in \mathbb{Z}[\xi]$, dla których H nie ma nieskończonej p-wysokości. Ponadto

(1) $R(\phi^j) = \prod_{p\in T} |\xi^j - 1|_p^{-1}$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$.

(2) Jeśli $|\xi|_p \neq 1$ dla każdego $p \in T$, to $R(\phi^j) = 1$ dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$.

Dowód. Niech $R = \mathbb{Z}[t]$ będzie pierścieniem wielomianów. Wtedy podgrupa H jest w naturalny sposób wyposażona w strukturę R-modułu nad pierścieniem $R = \mathbb{Z}[t]$, w którym ϕ oznacza mnożenie przez t. Bez straty ogólności H możemy traktować jako ideał ułamkowy dziedziny $D = \mathbb{Z}[\xi]$, gdzie $\xi \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1, 0\}$, zaś ϕ jest mnożeniem przez ξ na H. Istotnie, zauważmy, że H jest is R-modułem z jedynym ideałem pierwszym stowarzyszonym generowanym przez wielomian liniowy f, zaś $D \cong R/(f)$ jest izomorficzna z podpierścieniem w Q. Wobec tego istnieje indukowane zanurzenie $D \hookrightarrow H \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Jeżeli H jest grupą abelową, to liczba Reidemeistera $R(\phi^j)$ jest równa liczbie elementów grupy ilorazowej $\operatorname{Coker}(1 - \phi^j) = H/\operatorname{Im}(1 - \phi^j)$. Stąd $R(\phi^j) = \left|H/(\xi^j - 1)H\right|$. Niech $\mathfrak{P}(D)$ będzie zbiorem składającym się z liczb pierwszych generujących ideały pierwsze w D i weźmy $p \in \mathfrak{P}(D)$. Ponieważ $H/(\xi^j - 1)H$ jest skończony, to posiada ciąg kompozycyjny. Następnie zlokalizujmy D w każdym ideale pierwszym generowanym przez $p \in \mathfrak{P}(D)$ i rozważmy wymiar $H_{(p)}/(\xi^j - 1)H_{(p)}$ jako przestrzeni liniowej nad ciałem $D_{(p)}/(p) = \mathbb{F}_p$. Jeśli $h_p(1) = \infty$, to $H_{(p)} = \mathbb{Q}$ i wymiar ten jest równy zeru. W takim razie wystarczy rozważać tylko $p \in \mathfrak{P}(D)$, dla których $k_p(1) < \infty$. Oznaczmy zbiór takich elementów przez T. Jeśli $p \in T$, to $H_{(p)} \neq \mathbb{Q}$ i w takim razie $H_{(p)} \cong D_{(p)}$. Stąd $\dim_{\mathbb{F}_p} H_{(p)}/(\xi^j - 1)H_{(p)} = v_p(\xi^j - 1)$, gdzie v_p oznacza waluację p-adyczną. Otrzymaliśmy w ten sposób wzór (1). Zauważmy ponadto, że $T = \varnothing$ implikuje $H = \mathbb{Q}$ i w takim razie $R(\phi^j) = 1$ dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$. Aby wykazać (2) dla nietrywialnego przypadku załóżmy, że $T \neq \varnothing$ i weźmy $p \in T$. Jeśli $|\xi|_p \neq 1$ i skoro $k_p(1) < \infty$ oraz $\mathbb{Z}[\xi]$ jest pierścieniem, to $|\xi|_p < 1$. Zatem z własności ultrametryki, $|\xi^j - 1|_p = 1$ dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$. $\square$

2.3 Główne twierdzenie rozdziału

Rozważmy teraz dual Pontryagina $\widehat{G}$ wraz z jego endomorfizmem $\widehat{\phi} : \rho \mapsto \rho \circ \phi$.

Lemat 2.3.1. [20] Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem abelowej grupy G. Wówczas jądro $\operatorname{Ker}\left[\hat{\phi} : \hat{G} \to \hat{G}\right]$ jest kanonicznie izomorficzne do $\operatorname{Coker}\widehat{[\phi : G} \to G]$.

Dowód. Twierdzenie udowodnimy przez konstrukcję wymaganego izomorfizmu. Niech χ należy do $\operatorname{Coker}\widehat{(\phi : G} \to G)$. Wtedy χ jest homomorfizmem

$$\chi : G/\operatorname{Im}(\phi) \longrightarrow U(1).$$

Istnieje zatem indukowane odwzorowanie

$$\overline{\chi} : G \longrightarrow U(1),$$

które jest trywialne na $\operatorname{Im}(\phi)$. W takim razie $\overline{\chi} \circ \phi$ jest trywialne, co oznacza, że $\hat{\phi}(\overline{\chi})$ jest elementem neutralnym w $\hat{G}$ a zatem $\overline{\chi} \in \operatorname{Ker}(\hat{\phi})$.

Z drugiej strony, jeśli $\overline{\chi} \in \operatorname{Ker}(\hat{\phi})$, to χ jest trywialne na $\operatorname{Im}\phi$. Wobec tego $\overline{\chi}$ indukuje homomorfizm

$$\chi : G/\operatorname{Im}(\phi) \longrightarrow U(1)$$

i χ należy do $\widehat{\operatorname{Coker}}\,\phi$ a zatem odpowiedniość $\chi \leftrightarrow \overline{\chi}$ jest bijekcją. $\square$

Lemat 2.3.2. [43] Niech $L \subset N$ będzie R-modułem i weźmy $g \in R$.
Wtedy

(1)
$$\left|\frac{N}{gN}\right| = \left|\frac{N/L}{g(N/L)}\right|\left|\frac{L}{L \cap gN}\right|$$

(2) Jeśli N/L jest skończony a odwzorowanie $x \to gx$ jest monomorfizmem modułu N, to
$$\left|\frac{N}{gN}\right| = \left|\frac{L}{gL}\right|.$$

Na potrzeby dalszych rozważań, załóżmy,że G jako $R = \mathbb{Z}[t]$-moduł spełnia poniższe warunki.

(1) Zbiór stowarzyszonych ideałów pierwszych $\mathrm{Ass}(G)$ jest skończony i składa się wyłącznie z niezerowych ideałów głównych pierścienia R.

(2) Odwzorowanie $g \to (t^j - 1)g$ jest monomorfizmem grupy G dla $j \in \mathbb{N}$ (równoważnie $t^j - 1 \notin \mathfrak{p}$ dla każdego $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(G)$ i dla każdego $j \in \mathbb{N}$).

(3) Dla każdego $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(G)$, $m(\mathfrak{p}) = \dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{p})} G_{\mathfrak{p}} < \infty$, gdzie $\mathbb{K}(\mathfrak{p})$ oznacza ciało ułamków pierścienia $R/\mathfrak{p}$, zaś $G_{\mathfrak{p}} = G \otimes_R \mathbb{K}(\mathfrak{p})$.

Lemat 2.3.3. [43] Niech N będzie takim R-modułem, że zbiór $\mathrm{Ass}(N)$ jest skończony i składa się wyłącznie z nietrywialnych ideałów głównych. Załóżmy ponadto, że $m(\mathfrak{p}) = \dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{p})} N_{\mathfrak{p}} < \infty$ dla każdego $p \in \mathrm{Ass}(N)$. Jeśli dla $g \in R$ odwzorowanie $x \to gx$ jest monomorfizmem modułu N, to N/gN jest skończony.

Jeśli endomorfizm $\widehat{\phi} : \widehat{G} \to \widehat{G}$ jest ergodycznym epimorfizmem o skończonej entropii zwartej spójnej abelowej grupy $\widehat{G}$ skończonego wymiaru $d \geqslant 1$, to endomorfizm $\phi : G \to G$ spełnia powyższe (1) - (3). Grupy dualne $\widehat{G}$ o tej własności nazywamy solenoidami [43, 51]. Niech $F_{\widehat{\phi}}(j) = |Fix(\widehat{\phi}^j)|$ oznacza liczbę punktów stałych endomorfizmu $\widehat{\phi}^j$. Założenia, takie jak ergodyczność i skończona entropia, są konieczne, aby liczba $F_{\widehat{\phi}}(j)$ była skończona dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$.. W przypadku endomorfizmu dualnego $\widehat{\phi} : \widehat{G} \to \widehat{G}$, wykorzystujemy następujący wzór na zliczanie punktów okresowych odwzorowania $\hat{\phi}$.

Stwierdzenie 2.3.4. [5, Stwierdzenie 14], [43, Twierdzenie 1.1] Jeśli $\widehat{\phi} : \widehat{G} \to \widehat{G}$ jest ergodycznym automorfizmem o skończonej entropii skończenie wymiarowej zwartej spójnej grupy abelowej $\widehat{G}$, to istnieją algebraiczne ciała liczbowe $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$, zbiory miejsc skończonych $P_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{K}_i)$ oraz elementy $\xi_i \in \mathbb{K}_i$, z których żaden nie jest pierwiastkiem z jedynki dla $i = 1, \dots, n$, takie, że dla każdego $j \in \mathbb{N}$

$$F_{\widehat{\phi}}(j) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{v \in P_i} |\xi_i^j - 1|_v^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - 1|_{P_i}^{-1}. \tag{2.1}$$

Dowód. Przedstawimy główne kroki dowodu. Z założenia liczba punktów okresowych $F_{\widehat{\phi}}(j)$ jest skończona dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$. Traktując grupę abelową G jako $\mathbb{Z}[t]$-moduł i wykorzystując lemat 2.3.1 [37, Lemat 7.2] otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} F_{\widehat{\phi}}(j) &= |Fix(\widehat{\phi}^j)| = |\operatorname{Ker}(\widehat{\phi}^j - \mathrm{Id}_{\widehat{G}})| = |\widehat{\operatorname{Coker}(\phi - \mathrm{Id}_G)}| = \\ &= |\operatorname{Coker}(\phi^j - \mathrm{Id}_G)| = |G/(\phi^j - 1)G| = |G/(t^j - 1)G|. \end{aligned}$$

Zbiór multiplikatywny $U = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(G)} R - \mathfrak{p}$ ma taką własność, że $U \cap ann(a) = \emptyset$ dla wszystkich niezerowych elementów $a \in G$, zatem homomorfizm naturalny $G \to U^{-1}G$ jest monomorfizmem. Po utożsamieniu lokalizacji pierścienia R z podpierścieniami w $\mathbb{Q}(t)$, dziedzina $\mathfrak{R} = U^{-1}R = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(G)} R_{\mathfrak{p}}$ jest skończonym przekrojem dyskretnych pierścieni waluacyjnych a zatem jest dziedziną ideałów głównych [41]. Wymienione założenia skończonej entropii i skończonego wymiaru topologicznego wymuszają, aby $U^{-1}G$ był $\mathfrak{R}$-modułem noetherowskim. Wobec tego, istnieje filtracja

$$\{0\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = U^{-1}G \tag{2.2}$$

w której $G_i/G_{i-1} \cong \mathfrak{Q}/\mathfrak{q}_{\mathfrak{i}}$ dla nietrywialnych ideałów pierwszych $\mathfrak{q}_{\mathfrak{i}} \subset \mathfrak{R}, 1 \le i \le n$ a ponadto $\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{i}} \cap R \in \mathrm{Ass}(G)$ dla wszystkich $1 \le i \le n$. Poprzez identyfikację grupy G z jej obrazem przez odwzorowanie naturalne $U^{-1}G$ oraz wyznaczając przekrój łańcucha (2.2) z G otrzymujemy następujący łańcuch R-modułów

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = G. \tag{2.3}$$

Zauważmy, że dla każdego $1 \le i \le n$, możemy rozważyć indukowaną inkluzję

$$\frac{L_i}{L_{i-1}} \hookrightarrow \frac{G_i}{G_{i-1}} \cong \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{q}_{\mathfrak{i}}} \cong \mathbb{K}(\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}}) = K_i,$$

zaś $N_i = L_i/L_{i-1}$ można rozpatrywać jako ideał ułamkowy w $E_i = R/\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}}$. Na mocy Lematu 2.3.2(1) otrzymujemy

$$\left|\frac{L_i}{(t^j-1)L_i}\right| = \left|\frac{N_i}{(t^j-1)N_i}\right|\left|\frac{L_{i-1}}{L_{i-1}\cap(t^j-1)L_i}\right|,$$

gdzie $1 \le i \le n$. Weźmy teraz $y \in L_i$ oraz niech η oznacza obraz elementu y w N_i, zaś przez ξ_i oznaczmy obraz elementu t w E_i. Jeśli $(t^j-1)y \in L_{i-1}$, to $(\xi_i^j - 1)\eta = 0$. Założenie o ergodyczności $\widehat{\phi}$ implikuje, że $t^j - 1 \notin \mathfrak{p}_{\mathfrak{i}}$ a więc $(\xi_i^j - 1) \neq 0$. Zatem $\eta = 0$ oraz $y \in L_{i-1}$. Wynika z tego, że $L_{i-1} \cap (t^j-1)L_i = (t^j-1)L_{i-1}$ a więc

$$\left|\frac{L_i}{(t^j-1)L_i}\right| = \left|\frac{N_i}{(t^j-1)N_i}\right|\left|\frac{L_{i-1}}{(t^j-1)L_{i-1}}\right|. \tag{2.4}$$

Po zastosowaniu otrzymanej równości (2.4) dla każdego z modułów $L_i, 1 \le i \le n$, otrzymujemy

$$|G/(t^j-1)G| = \prod_{i=1}^{n} |N_i/(t^j-1)N_i|.$$

Rozważmy teraz pojedynczy czynnik $|N_i/(t^j-1)N_i|$. Ponieważ E_i jest skończenie generowaną dziedziną, z [43, Twierdzenie 1.1] oraz [13, Twierdzenie 4.14] wynika, że całkowite domknięcie D_i dziedziny E_i w K_i jest skończenie generowaną dziedziną Dedekinda. W takim razie D_i jest skończenie generowanym E_i-modułem. Ponadto $I_i = D_i \otimes_{E_i} N_i$ możemy traktować jako ideał ułamkowy w D_i. Z lematu 2.3.3 oraz lematu 2.3.2(2) otrzymujemy, że $|N_i/(\xi_i^j - 1)N_i| = |I_i/(\xi_i^j - 1)I_i|$ (patrz [43]). Traktując $I_i/(\xi_i^j - 1)I_i$ jako D_i-moduł, znajdując dla niego ciąg kompozycyjny i sukcesywnie lokalizując go w każdym ze stowarzyszonych ideałów pierwszych, otrzymujemy, że

$$|I_i/(\xi_i^j - 1)I_i| = \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(I_i/(\xi_i^j-1)I_i)} q_{\mathfrak{m}}^{\delta_{\mathfrak{m}}(\xi_i, I_i)}, \tag{2.5}$$

gdzie $q_{\mathfrak{m}} = |D_i/\mathfrak{m}|$, zaś $\delta_{\mathfrak{m}}(\xi_i, I_i) = \dim_{D_i/\mathfrak{m}}(I_i/(\xi_i^j - 1)I_i)_{\mathfrak{m}}$. Niech teraz $P_i = \{\mathfrak{m} \in Spec(D_i) : I_{\mathfrak{m}} \neq K_i\}$. Wynika z tego, że iloczyn (2.5) może być indeksowany po prostu przez wszystkie $\mathfrak{m} \in P_i$. Każda lokalizacja $(D_i)_{\mathfrak{m}}$ jest innym pierścieniem waluacyjnym ciała K_i, zaś P_i możemy utożsamić ze zbiorem skończonych miejsc ciała globalnego K_i. Skoro $\delta_{\mathfrak{m}}(\xi_i, D_i) = v_{\mathfrak{m}}(\xi_i^j - 1)$, to otrzymujemy, że

$$|I_i/(\xi_i^j - 1)I_i| = \prod_{\mathfrak{m} \in P_i} q_{\mathfrak{m}}^{\delta_{\mathfrak{m}}(\xi_i, D_i)} = \prod_{\mathfrak{m} \in P_i} q_{\mathfrak{m}}^{v_{\mathfrak{m}}(\xi_i^j - 1)} = \prod_{\mathfrak{m} \in P_i} |\xi_i^j - 1|_{\mathfrak{m}}^{-1},$$

gdzie $|\cdot|_{\mathfrak{m}}$ jest znormalizowaną wartością bezwzględną wyznaczoną przez $D_{\mathfrak{m}}$, co kończy dowód. □

Uwaga 2.3.5. Zauważmy, że $\mathbb{K}_i = \mathbb{Q}(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Stosując wzór Artina [56] do (2.1) otrzymujemy, że

$$F_{\widehat{\phi}}(j) = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - 1|_{P_i^\infty \cup S_i}, \tag{2.6}$$

gdzie P_i^∞ oznacza zbiór miejsc nieskończonych ciała $\mathbb{K}_i$, zaś $S_i = \mathcal{P}(\mathbb{K}_i) \setminus P_i$. Ponadto, ponieważ ϕ jest automorfizmem, to z [43, Uwaga 1] wynika, że $|\xi_i|_v = 1$ dla każdego $v \in P_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Definicja 2.3.6. Załóżmy, że funkcja analityczna f jest zdefiniowana w obszarze D płaszczyzny zespolonej. Jeśli na brzegu obszaru D nie istnieje punkt, przez który funkcja f może być przedłużona analitycznie, to brzeg ten nazywamy *brzegiem naturalnym* tej funkcji.

Lemat 2.3.7. [5] Niech $R(z) = \sum_{n=1}^{\infty} R(\phi^n) z^n$. Jeśli $R_\phi(z)$ jest funkcją wymierną, to $R(z)$ także. Jeśli dla $R_\phi(z)$ istnieje przedłużenie analityczne poza okrąg zbieżności, to dla $R(z)$ również. W szczególności, jeżeli okrąg zbieżności funkcji $R(z)$ jest brzegiem naturalnym tej funkcji, to okrąg zbieżności funkcji $R_\phi(z)$ jest brzegiem naturalnym funkcji $R_\phi(z)$.

Dowód. Teza wynika z faktu, że $R(z) = z \cdot R'_\phi(z)/R_\phi(z)$. □

Istnieje ścisły związek pomiędzy własnościami współczynników zespolonego szeregu potęgowego a własnościami analitycznymi funkcji zadanej tym szeregiem.

Twierdzenie 2.3.8. **(Pólya–Carlson)** [8], [49], [52] Szereg potęgowy o współczynnikach całkowitych i promieniu zbieżności równym 1 jest albo wymierny, albo okrąg jednostkowy jest jego brzegiem naturalnym.

Do dowodu głównego twierdzenia użyjemy kluczowego rezultatu Bella, Milesa i Warda.

Lemat 2.3.9. [5, Lemat 17] Niech S będzie skończonym zbiorem miejsc algebraicznych ciał liczbowych oraz niech ξ_v będzie, różnym od pierwiastka z jedynki, elementem odpowiedniego ciała liczbowego takim, że$|\xi_v|_v = 1$ dla każdego $v \in S$. Wtedy okrąg jednostkowy jest brzegiem naturalnym funkcji

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^n,$$

gdzie $f(n) = \prod_{v \in S} |\xi_v^n - 1|_v$ dla $n \geqslant 1$.

Najważniejszy rezultat niniejszego paragrafu stanowi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.3.10. Niech $\phi : G \to G$ będzie automorfizmem przeliczalnej abelowej grupy G będącej podgrupą w $\mathbb{Q}^d$, gdzie $d \geqslant 1$. Załóżmy,że G jako $R = \mathbb{Z}[t]$-moduł spełnia następujące warunki.

(1) Zbiór stowarzyszonych ideałów pierwszych $\mathrm{Ass}(G)$ jest skończony i składa się wyłącznie z niezerowych ideałów głównych pierścienia wielomianów $R = \mathbb{Z}[t]$.

(2) Odwzorowanie $g \to (t^j - 1)g$ jest monomorfizmem grupy G dla $j \in \mathbb{N}$, (równoważnie $t^j - 1 \notin \mathfrak{p}$ dla każdego $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(G)$ i dla każdego $j \in \mathbb{N}$).

(3) Dla każdego $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(G)$, $m(\mathfrak{p}) = \dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{p})} G_\mathfrak{p} < \infty$, gdzie $\mathbb{K}(\mathfrak{p})$ oznacza ciało ułamków pierścienia $R/\mathfrak{p}$, zaś $G_\mathfrak{p} = G \otimes_R K(\mathfrak{p})$.

Wtedy istnieją algebraiczne ciała liczbowe $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$, zbiory skończonych miejsc $P_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{K}_i)$, $S_i = \mathcal{P}(\mathbb{K}_i) \setminus P_i$, oraz elementy $\xi_i \in \mathbb{K}_i$, z których żaden nie jest pierwiastkiem z jedynki takie, że

$$R(\phi^j) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{v \in P_i} |\xi_i^j - 1|_v^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - 1|_{P_i}^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - 1|_{P_i^\infty \cup S_i} \tag{2.7}$$

dla każdego $i = 1, \dots, n$ i dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$. Załóżmy ponadto, że ostatni iloczyn w (2.7) składa się wyłącznie ze skończenie wielu miejsc oraz że $|\xi_i|_v \neq 1$ dla każdego v w zbiorze nieskończonych miejsc P_i^∞ ciała $\mathbb{K}_i$, $i = 1, \dots, n$. Wtedy zeta funkcja Reidemeistera $R_\phi(z)$ jest albo funkcją wymierną, albo okrąg jednostkowy jest jej brzegiem naturalnym, przy czym druga sytuacja zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|\xi_i|_v = 1$ dla pewnego $v \in S_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Dowód. Liczba Reidemeistera endomorfizmu ϕ grupy abelowej G jest równa liczbie elementów w grupie ilorazowej $\operatorname{Coker}(\phi - \operatorname{Id}_G) = G/\operatorname{Im}(\phi - \operatorname{Id}_G)$ (podobnie $\operatorname{Coker}(\operatorname{Id}_G - \phi) = G/\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_G - \phi)$). Na mocy lematu 2.3.1 otrzymujemy, że

$$R(\phi) = |\operatorname{Coker}(\phi - \operatorname{Id}_G)| = |\widehat{\operatorname{Coker}(\phi - \operatorname{Id}_G)}| = |\operatorname{Ker}(\widehat{\phi} - \operatorname{Id}_{\widehat{G}})| = |\operatorname{Fix}(\widehat{\phi})|. \tag{2.8}$$

Jeśli endomorfizm $\phi : G \to G$ spełnia warunki (1) - (3), to endomorfizm $\widehat{\phi}$ jest ergodycznym epimorfizmem o skończonej entropii zwartej spójnej grupy abelowej $\widehat{G}$ o skończonym wymiarze $d \geqslant 1$, tj. dual Pontryagina $\widehat{G}$ jest solenoidem [43, 51]. Stąd liczby Reidemeistera $R(\phi^j)$ oraz liczby punktów okresowych odwzorowania dualnego $F_{\widehat{\phi}}(j)$ są skończone dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$. Na mocy (2.1), (2.6) i (2.8) otrzymujemy, że

$$R(\phi^j) = F_{\widehat{\phi}}(j) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{v \in P_i} |\xi_i^j - 1|_v^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - 1|_{P_i}^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - 1|_{P_i^\infty \cup S_i}. \tag{2.9}$$

Niech $S_i^* = \{v \in S_i : |\xi_i|_v \neq 1\}$, $S_i^{**} = \{v \in S_i : |\xi_i|_v > 1\}$ oraz niech

$$f(j) = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - 1|_{S_i \setminus S_i^*}, \quad g(j) = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - 1|_{P_i^\infty \cup S_i^*}.$$

Zatem $R(\phi^j) = f(j)g(j)$ na mocy (2.7). Z własności ultrametryki otrzymujemy, że

$$g(j) = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i|_{S_i^{**}}^j \cdot |\xi_i^j - 1|_{P_i^\infty}. \tag{2.10}$$

Używając odpowiedniego wielomianu symetrycznego, możemy rozszerzyć iloczyn (2.10) aby otrzymać wyrażenie postaci

$$g(j) = \sum_{I \in \mathcal{I}} d_I w_I^j, \tag{2.11}$$

gdzie $\mathcal{I}$ jest zbiorem indeksowanym przez zbiór skończony, $d_I \in \{-1, 1\}$ oraz $w_I \in \mathbb{C}$. Co więcej, na mocy (2.11),

$$R_\phi(z) = \exp\left(\sum_{I \in \mathcal{I}} d_I \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(j)(w_I z)^j}{j} \right).$$

Jeśli $S_i \setminus S_i^* = \varnothing$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$, to$f(j) \equiv 1$ i zeta funkcja Reidemeistera $R_\phi(z)$ jest wymierna. Załóżmy więc, że $S_i \setminus S_i^* \neq \varnothing$ dla pewnego i. Na mocy lematu 2.3.7, aby wykazać, że dla $R_\phi(z)$ istnieje brzeg naturalny, wystarczy pokazać istnienie brzegu naturalnego dla szeregu

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} d_I \sum_{j=1}^{\infty} f(j)(w_I z)^j.$$

Zauważmy, że $\limsup_{j \to \infty} f(j)^{1/j} = 1$, zatem dla każdego $I \in \mathcal{I}$ szereg

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(j)(w_I z)^j$$

ma promień zbieżności równy $|w_I|^{-1}$. Ponieważ $|\xi_i|_v \neq 1$ dla każdego $v \in P_i^\infty$, $i = 1, \ldots, n$, to w rozwinięciu (2.11) istnieje składnik dominujący w_J taki, że

$$|w_J| = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i|_{S_i^{**}} \prod_{v \in P_i^\infty} \max\{|\xi_i|_v, 1\} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{v \in P_i^\infty \cup \mathcal{P}(\mathbb{K}_j)} \max\{|\xi_i|_v, 1\}$$

oraz $|w_J| > |w_I|$ dla każdego $I \neq J$ (zauważmy przy tym, że $\log|w_J|$ oznacza topologiczną entropię, jak w [38]). Ponieważ $|w_J|^{-1} < |w_I|^{-1}$ dla każdego $I \neq J$, wystarczy pokazać, że okrąg zbieżności $|z| = |w_J|^{-1}$ jest brzegiem naturalnym dla $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)(w_I z)^j$. Jest to jednak dokładnie ten przypadek, kiedy okrąg jednostkowy jest naturalnym brzegiem dla $\sum_{j=1}^{\infty} f(j) z^j$, co zostało już omówione w lemacie 2.3.9. $\square$

2.4 Przykłady

Aby podać przykład niewymiernej zeta funkcji Reidemeistera, rozważmy endomorfizm $\phi : g \to 2g$ modułu $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$. Moduł ten jest nieskończenie generowaną grupą abelową. Poniższe rozważania opierają się na metodzie i obliczeniach Everesta, Stangoe'a oraz Warda w lemacie 4.1 w [14] przeprowadzonych dla zeta funkcji Artina–Mazura endomorfizmu zwartej abelowej grupy dualnej $\widehat{\phi}$. W pierwszej kolejności udowodnimy następujący fakt.

Lemat 2.4.1. Niech $\phi : g \to 2g$ będzie endomorfizmem modułu $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$. Wtedy okrąg $|z| = \frac{1}{2}$ jest brzegiem naturalnym zeta funkcji Reidemeistera $R_\phi(z)$.

Dowód. Zwarta dualna grupa abelowa $\widehat{\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]}$ jest jednowymiarowym solenoidem. Na mocy (2.1), (2.6) oraz (2.9), liczby Reidemeistera iteracji odwzorowania ϕ i liczbę punktów okresowych odwzorowania dualnego $\widehat{\phi}$ opisuje zależność

$$R(\phi^j) = |Fix(\widehat{\phi}^j)| = F_{\widehat{\phi}}(j) = |2^j - 1| \cdot |2^j - 1|_3.$$

Niech $\xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} |2^n - 1| \cdot |2^n - 1|_3$ a zatem $R_\phi(z) = \exp(\xi(z))$. Zauważmy, że w takim razie

$$\begin{aligned} \xi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}(2^{2n+1} - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n}(2^{2n} - 1)|2^{2n} - 1|_3 \\ &= \log\left(\frac{1-z}{1-2z}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-z^2}{1-4z^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n}(2^{2n} - 1)|2^{2n} - 1|_3. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} |2^n - 1|_3 &= |(3-1)^n - 1|_3 = \\ = |3^n - n3^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}3n &+ (-1)^n - 1|_3 = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3}|n|_3 & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste,} \\ 1 & \text{jeśli } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases} \end{aligned}$$

a zatem w szczególności

$$|4^n - 1|_3 = |2^{2n} - 1|_3 = \tfrac{1}{3}|2n|_3 = \tfrac{1}{3}|n|_3. \tag{2.12}$$

Oznaczmy przez $\frac{1}{6}\xi_1(z)$ ostatni składnik sumy $\xi(z)$. Wtedy z (2.12) otrzymujemy, że

$$\xi_1(z) = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}(4^n - 1)|4^n - 1|_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}(4^n - 1)|n|_3.$$

Wykażemy teraz, że $\xi_1(z)$ ma nieskończenie wiele osobliwości logarytmicznych na okręgu $|z| = \frac{1}{2}$ i każda z nich odpowiada miejscu zerowemu zeta funkcji Reidemeistera

$R_\phi(z)$ [14, Lemat 4.1]. Niech zapis $3^a \Big\| n$ oznacza, że $3^a \Big| n$, ale $3^{a+1} \not| \, n$. Zauważmy, że $3^a \Big\| n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|n|_3 = 3^{-a}$, zatem

$$\xi_1(z) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j} \sum_{3^j \| n} \frac{z^{2n}}{n}(4^n - 1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j} \eta_j^{(4)}(z),$$

gdzie $\eta_j^{(a)}(z) = \sum_{3^j \| n} \frac{z^{2n}}{n}(a^n - 1)$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\eta_0^{(a)}(z) &= \sum_{3^0 \| n} \frac{z^{2n}}{n}(a^n - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}(a^n - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{3n}(a^{3n} - 1) \\
&= \log\left(\frac{1 - z^2}{1 - az^2}\right) - \frac{1}{3} \log\left(\frac{1 - z^6}{1 - a^3 z^6}\right),
\end{aligned}$$

$$\eta_1^{(4)}(z) = \sum_{3^1 \| n} \frac{z^{2n}}{n}(4^n - 1) = \sum_{3^0 \| n} \frac{z^{6n}}{3n}(4^{3n} - 1) = \tfrac{1}{3}\eta_0^{(4^3)}(z^3),$$

$$\eta_2^{(4)}(z) = \tfrac{1}{9}\eta_0^{(4^9)}(z^9),$$

i tak dalej. Stąd

$$\xi_1(z) = \log\left(\frac{1 - z^2}{1 - (2z)^2}\right) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{9^j} \log\left(\frac{1 - (2z)^{2 \times 3^j}}{1 - z^{2 \times 3^j}}\right).$$

Wobec tego dla zeta funkcji Reidemeistera zachodzi następująca równość

$$|R_\phi(z)| = \left|\frac{1 - z}{1 - 2z}\right| \cdot \left|\frac{1 - (2z)^2}{1 - z^2}\right|^{1/2} \cdot \left|\frac{1 - z^2}{1 - (2z)^2}\right|^{1/6} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \left|\frac{1 - (2z)^{2 \times 3^j}}{1 - z^{2 \times 3^j}}\right|^{1/3 \times 9^j}.$$

W takim razie szereg określający zeta funkcję Reidemeistera $R_\phi(z)$ ma zera we wszystkich punktach postaci $\frac{1}{2} e^{2\pi i j / 3^r}$, $r \geqslant 1$ a więc $|z| = \frac{1}{2}$ jest brzegiem naturalnym zeta funkcji Reidemeistera $R_\phi(z)$. $\square$

Rozdział 3

Dychotomia zeta funkcji Reidemeistera endomorfizmów grup $\mathbb{Z}_p^d$

W niniejszym rozdziale udowodnimy dychotomię Pólyi–Carlsona między wymiernością a istnieniem brzegu naturalnego zeta funkcji Reidemeistera endomorfizmów grup $\mathbb{Z}_p^d$, $d \geqslant 1$, gdzie przez $\mathbb{Z}_p$ rozumiemy addytywną grupę p-adycznych liczb całkowitych. Grupa $\mathbb{Z}_p$ jest najprostszym przykładem nieskończonej pro-p grupy. Jest to całkowicie niespójna zwarta beztorsyjna grupa abelowa. Ciało liczb p-adycznych oznaczamy przez $\mathbb{Q}_p$, zaś p-adyczną wartość bezwzględną (jak również jej jednoznaczne rozszerzenie do algebraicznego domknięcia $\overline{\mathbb{Q}}_p$) przez $|\cdot|_p$.

Lemat 3.0.1. $\mathrm{End}(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ dla abelowej grupy $\mathbb{Z}_p$.

Dowód. Niech $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}_p)$. Ponieważ $p^n\phi(x) = \phi(p^n x)$, to $\phi(p^n\mathbb{Z}_p) \subset p^n\mathbb{Z}_p$ a więc odwzorowanie ϕ jest ciągłe. Dla każdego $x \in \mathbb{Z}_p$ istnieje ciąg liczb całkowitych x_n zbieżny do x. Wobec tego

$$\phi(x) = \lim \phi(x_n) = \lim x_n\phi(1) = \phi(1)x,$$

i endomorfizm ϕ jest zdefiniowany jako mnożenie przez $\phi(1)$. $\square$

Niech $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}_p)$, wtedy $\phi(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{Z}_p$ oraz $\phi^n(x) = a^n x$. Z definicji $y \sim_\phi x$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $b \in \mathbb{Z}_p$, dla którego $y = b + x - ab = x + b(1-a)$, co z kolei oznacza, że $y \equiv x(\mathrm{mod}(1-a))$ i w takim razie

$$R(\phi) = |\mathbb{Z}_p/(1-a)\mathbb{Z}_p|.$$

Z drugiej strony $(1-a)\mathbb{Z}_p = p^{v_p(1-a)}\mathbb{Z}_p = |1-a|_p^{-1}\mathbb{Z}_p$, więc

$$R(\phi) = |1-a|_p^{-1} = |a-1|_p^{-1}$$

i otrzymujemy, że

$$R(\phi^n) = |1-a^n|_p^{-1} = |a^n-1|_p^{-1}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Rozważmy teraz $\mathbb{Z}_p^d, d \geqslant 2$. Z lematu 3.0.1 otrzymujemy, że $\mathrm{End}(\mathbb{Z}_p^d) = \mathrm{M}_d(\mathbb{Z}_p)$. Dla dowolnej macierzy $A \in M_d(\mathbb{Z}_p)$ istnieje macierz diagonalna $D \in M_d(\mathbb{Z}_p)$ oraz macierze unimodularne $E, F \in M_d(\mathbb{Z}_p)$ takie, że $D = EAF$.

Lemat 3.0.2. Dla endomorfizmu $\phi_p : \mathbb{Z}_p^d \to \mathbb{Z}_p^d$ zachodzi następujący wzór

$$R(\phi_p) = |\mathrm{Coker}(1-\phi_p)| = |\det(\Phi_p - \mathrm{Id})|_p^{-1},$$

gdzie Φ_p jest macierzą odwzorowania ϕ_p.

Dowód. Niech $D, E, F \in M_d(\mathbb{Z}_p)$ będą takie, że $D = E(\mathrm{Id} - \Phi_p)F$, gdzie $D = (a_i)$ jest macierzą diagonalną, $a_i \in \mathbb{Z}_p, 1 \leq i \leq d$ oraz macierze E, F są unimodularne. Wtedy

$$R(\phi_p) = |\mathrm{Coker}(1-\phi_p)| = |\mathbb{Z}_p^d : (\mathrm{Id} - \Phi_p)\mathbb{Z}_p^d| = |\mathbb{Z}_p^d : D\mathbb{Z}_p^d| =$$

$$= |\mathbb{Z}_p : a_1\mathbb{Z}_p| \cdot |\mathbb{Z}_p : a_2\mathbb{Z}_p| \cdot \ldots \cdot |\mathbb{Z}_p : a_d\mathbb{Z}_p| = |a_1|_p^{-1} \cdot \ldots \cdot |a_d|_p^{-1} =$$

$$= |\det(D)|_p^{-1} = |\det(\mathrm{Id} - \Phi_p)|_p^{-1} = |\det(\Phi_p - \mathrm{Id})|_p^{-1}.$$

□

Aby obliczyć wartość wyrażeń postaci $|a^n - 1|_p$ dla $|a|_p = 1$ występujących w ciągu $R(\phi^n) = |a^n - 1|_p^{-1}, n > 0$ posłużymy się poniższym lematem.

Lemat 3.0.3. [5, Lemat 2], [42, Lemat 4.9] Niech K_v będzie niearchimedesowym ciałem lokalnym i weźmy $x \in K_v$. Załóżmy, że $|x|_v = 1$ oraz x ma nieskończony rząd multiplikatywny. Przez $p > 0$ oznaczmy charakterystykę ciała reszt F_v, zaś $\gamma \in \mathbb{N}$ oznaczać będzie multiplikatywny rząd obrazu elementu x w F_v. Wtedy $|x^n - 1|_v = 1$ o ile $(\gamma, n) = 1$ i $\gamma \neq 1$. Ponadto istnieją stałe $0 < C < 1$ i $r_0 \geqslant 0$ takie, że jeśli $n = k\gamma p^r$, gdzie $(p, k) = 1$ i $r > r_0$, to $|x^n - 1|_v = C|p|_v^r$, o ile $char(K_v) = 0$.

Udowodnimy teraz dychotomię Pólyi–Carlsona między wymiernością a istnieniem brzegu naturalnego zeta funkcji Reidemeistera endomorfizmów grup $\mathbb{Z}_p^d, d \geqslant 1$ (patrz też [6]).

Twierdzenie 3.0.4. Niech $\phi_p : \mathbb{Z}_p^d \to \mathbb{Z}_p^d$ będzie endomorfizmem oswojonym oraz $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_d \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ będą wartościami własnymi macierzy Φ_p, licząc wraz z krotnościami. Wówczas zeta funkcja Reidemeistera $R_{\phi_p}(z)$ jest albo funkcją wymierną, albo okrąg jednostkowy jest jej brzegiem naturalnym, przy czym druga sytuacja zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|\lambda_i|_p = 1$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Dowód. Rozpatrzmy najpierw przypadek grupy $\mathbb{Z}_p$, ponieważ ilustruje on niektóre idee potrzebne do udowodnienia dychotomii w ogólnym przypadku, tj. gdy $d \geqslant 1$. Na mocy 3.0.1, $\phi_p(x) = ax$, gdzie $a \in \mathbb{Z}_p$. Stąd $|a|_p \leqslant 1$. Wówczas liczby Reidemeistera $R(\phi_p^n) = |a^n - 1|_p^{-1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $|a|_p < 1$, to $R(\phi_p^n) = |a^n - 1|_p^{-1} = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd promień zbieżności $R_{\phi_p}(z)$ jest równy 1, zaś zeta funkcja Reidemeistera $R_{\phi_p}(z) = \frac{1}{1-z}$ jest funkcją wymierną. Niech zapis $a(n) << b(n)$ oznacza, że istnieje stała c niezależna od n, dla której $a(n) < c \cdot b(n)$. Załóżmy, że $|a|_p = 1$. Wyprowadzimy ograniczenie

$$\frac{1}{n} << |a^n - 1|_p \leqslant 1, \tag{3.1}$$

aby następnie pokazać, że promień zbieżności $R_{\phi_p}(z)$ jest równy 1. Ograniczenie górne w (3.1) wynika z definicji normy p-adycznej. Możemy przyjąć, że $|a^n - 1|_p < 1$. Niech F oznacza najmniejsze ciało, które zawiera $\mathbb{Q}_p$, jest algebraicznie domknięte oraz zupełne względem metryki $|\cdot|_p$. Logarytm p-adyczny $\log_p$ jest zdefiniowany następująco

$$\log_p(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

i jest zbieżny dla każdego $z \in F$ takiego, że $|z|_p < 1$. Kładąc $z = a^n - 1$ otrzymujemy, że

$$\log_p(a^n) = (a^n - 1) - \frac{(a^n-1)^2}{2} + \frac{(a^n-1)^3}{3} - ...$$

a więc $|\log_p(a^n)|_p \leqslant |a^n - 1|_p$. Z kolei

$$\frac{1}{n} << |n \log_p(a)|_p = |\log_p(a^n)|_p$$

zachodzi zawsze i w efekcie otrzymujemy (3.1). Na mocy ograniczenia (3.1) oraz wzoru Cauchy'ego-Hadamarda wynika, że promień zbieżności funkcji $R_{\phi_p}(z)$ jest równy 1. Pozostaje zatem jeszcze pokazać, że jeśli $|a|_p = 1$, to zeta funkcja Reidemeistera $R_{\phi_p}(z)$ jest niewymierna a co za tym idzie, na mocy lematu 2.3.7 oraz twierdzenia Pólyi–Carlsona, okrąg jednostkowy jest jej naturalnym brzegiem. Załóżmy zatem, że $R_{\phi_p}(z)$ jest wymierna a więc, na mocy lematu 2.3.7, funkcja $Z_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} R(\phi_p^n) z^n$ również jest wymierna. W takim razie ciąg $R(\phi_p^n)$ spełnia liniową relację rekurencyjną. Zdefiniujmy $n = \gamma p^r$ gdzie $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Na mocy lematu 3.0.3 otrzymujemy, że

$$R(\phi_p^{kn}) = R(\phi_p^n),$$

o ile k jest względnie pierwsza z n. Wobec tego $R(\phi_p^n)$ przyjmuje nieskończenie wiele wartości nieskończenie wiele razy. W takim razie, w oparciu o wynik Myersona i van der Poortena [46, Stwierdzenie 2], nie może on spełniać rekurencji liniowej, co daje sprzeczność.

Rozważmy teraz ogólny przypadek endomorfizmu oswojonego $\phi_p : \mathbb{Z}_p^d \to \mathbb{Z}_p^d, d \geqslant 1$. Z lematu 3.0.2 otrzymujemy

$$R(\phi_p^n) = |\mathrm{Coker}(1 - \phi_p^n)| = |\det(\Phi_p^n - \mathrm{Id})|_p^{-1} = \prod_{i=1}^{d} |\lambda_i^n - 1|_p^{-1},$$

gdzie Φ_p jest macierzą homomorfizmu ϕ_p, zaś $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_d \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ są wartościami własnymi macierzy Φ_p, licząc wraz z krotnościami. Współczynniki wielomianu $\prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)$ leżą w $\mathbb{Z}_p$. W szczególności $|\lambda_i|_p \leqslant 1$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, d\}$ (patrz [23]). Jeśli $|\lambda_i|_p < 1$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, d\}$, to $R(\phi_p^n) = \prod_{i=1}^{d} |\lambda_i^n - 1|_p^{-1} = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wobec tego, promień zbieżności szeregu $R_{\phi_p}(z)$ jest równy 1 a zeta funkcja Reidemeistera $R_{\phi_p}(z) = \frac{1}{1-z}$ jest funkcją wymierną. Jeśli $|\lambda_i|_p = 1$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, d\}$, to ograniczenie (3.1) implikuje ograniczenie

$$\frac{1}{n^d} << R(\phi_p^n) = \prod_{i=1}^{d} |\lambda_i^n - 1|_p^{-1} \leqslant 1. \tag{3.2}$$

Stąd, na mocy wzoru Cauchy'ego-Hadamarda i (3.2), promień zbieżności $R_{\phi_p}(z)$ jest równy 1. Wystarczy teraz pokazać, że jeśli $|\lambda_i|_p = 1$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, d\}$, to zeta funkcja Reidemeistera $R_{\phi_p}(z)$ jest niewymierna. Oznacza to, że na mocy lematu 2.3.7 oraz twierdzenia Pólyi–Carlsona, okrąg jednostkowy jest brzegiem naturalnym funkcji $R_{\phi_p}(z)$. Załóżmy więc, że zeta funkcja Reidemeistera $R_{\phi_p}(z)$ jest wymierna. Wówczas z lematu 2.3.7 wynika, że funkcja $Z_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} R(\phi_p^n) z^n$ również jest funkcją wymierną. Wobec tego, ciąg $R(\phi_p^n)$ spełnia liniową zależność rekurencyjną. Zdefiniujmy $n = q^e\gamma p^r$, gdzie $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Na mocy lematu 3.0.3 otrzymujemy, że

$$R(\phi_p^{kn}) = R(\phi_p^n)$$

o ile k jest względnie pierwsza z n a więc ciąg $R(\phi_p^n)$ przyjmuje nieskończenie wiele wartości nieskończenie wiele razy. W takim razie, w oparciu o wynik Myersona i van der Poortena [46, Stwierdzenie 2], nie może on spełniać rekurencji liniowej, co daje sprzeczność. $\square$

Rozdział 4

Dychotomia zeta funkcji Reidemeistera odwzorowania ciągłego

Rozważmy ciągłe odwzorowanie $f : X \to X$ przestrzeni topologicznej X posiadającej nakrycie uniwersalne $p : \tilde{X} \to X$ oraz niech $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ będzie podniesieniem odwzorowania f, tzn $p \circ \tilde{f} = f \circ p$. Podzbiór $p(Fix(\tilde{f})) \subset Fix(f)$ nazywamy *klasą punktu stałego odwzorowania* f wyznaczoną przez klasę podniesienia $[\tilde{f}]$. Klasy podniesienia odwzorowania są klasami równoważności relacji sprzężenia. Przypomnijmy znany fakt łączący własności klas podniesienia i klas punktów stałych.

Lemat 4.0.1. [35]

(1) $\mathrm{Fix}(f) = \cup_{\tilde{f}} p(\mathrm{Fix}(\tilde{f}))$.

(2) $p(\mathrm{Fix}(\tilde{f})) = p(\mathrm{Fix}(\tilde{f}'))$ o ile $[\tilde{f}] = [\tilde{f}']$.

(3) $p(\mathrm{Fix}(\tilde{f})) \cap p(\mathrm{Fix}(\tilde{f}')) = \emptyset$ jeśli $[\tilde{f}] \neq [\tilde{f}']$.

Niech $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ będzie ustalonym podniesieniem ciągłego odwzorowania $f : X \to X$ przestrzeni topologiczej X, zaś Γ będzie grupą przesunięć nakrycia $\tilde{X}$ przestrzeni X. Wtedy każde podniesienie odwzorowania f można zapisać w sposób jednoznaczny jako $\gamma \circ \tilde{f}$, $\gamma \in \Gamma$, zaś elementy z Γ mogą być traktowane jako współrzędne podniesienia $\gamma \circ \tilde{f}$. Wobec tego dla każdego elementu $\gamma \in \Gamma$, złożenie $\tilde{f} \circ \gamma$ także jest podniesieniem odwzorowania f, zatem istnieje wyznaczony w sposób jednoznaczny element $\gamma' \in \Gamma$ taki, że $\gamma' \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ \gamma$. Odwzorowanie $\gamma \mapsto \gamma'$ jest wyznaczone przez $\tilde{f}$ i jest homomorfizmem.

Definicja 4.0.2. Endomorfizm $\tilde{f}_* : \Gamma \to \Gamma$ wyznaczony przez podniesienie $\tilde{f}$ odwzorowania f definiujemy następująco

$$\tilde{f}_*(\gamma) \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ \gamma.$$

Znanym faktem jest, że $\Gamma \cong \pi_1(X)$. Utożsamienie $\pi = \pi_1(X, x_0)$ oraz Γ przebiega następująco. Wybierzmy punkt bazowy $x_0 \in X$ oraz $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}$. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy $\tilde{X}$ a klasami homotopii dróg w przestrzeni X zaczynających się w punkcie x_0. Mianowicie, dla danego $\tilde{x} \in \tilde{X}$ bierzemy dowolną drogę z $\tilde{x}_0$ do $\tilde{x}$ i rzutujemy ją na X. Z drugiej strony możemy podnieść drogę c rozpoczynającą się w punkcie $x_0 \in X$ do drogi w $\tilde{X}$ rozpoczynającej się w $\tilde{x}_0$ i wyznaczyć jej punkt końcowy. W ten sposób możemy utożsamić punkty przestrzeni $\tilde{X}$ z klasami dróg $< c >$ w X rozpoczynających się w punkcie x_0. Po takim utożsamieniu $\tilde{x}_0 =< e >$ jest elementem neutralnym grupy $\pi_1(X, x_0)$. Działanie klasy pętli $\alpha =< a >\in \pi_1(X, x_0)$ na $\tilde{X}$ jest zdefiniowane następująco

$$\alpha =< a >:< c >\to \alpha.c =< a.c > .$$

Otrzymujemy zatem zależność pomiędzy

$$\tilde{f}_* : \pi \to \pi$$

oraz

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, f(x_0)).$$

opisaną w poniższym lemacie.

Lemat 4.0.3. Niech $\tilde{f}(\tilde{x}_0) =< w >$. Wtedy istnieje diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, f(x_0)) \\ & \tilde{f}_* \searrow & \downarrow w_* \\ & & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Lemat 4.0.4. [35] Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość, nazywana *bijekcją Reidemeistera* pomiędzy klasami podniesień f i klasami $\tilde{f}_*$-sprzężoności w π. Klasa podniesienia $[\gamma \circ \tilde{f}]$ odpowiada klasie $\tilde{f}_*$-sprzężoności elementu γ. Wobec tego $R(f) = R(\tilde{f}_*)$.

Z punktu widzenia teorii układów dynamicznych zajmujemy się rozważaniem iteracji odwzorowania f przy założeniu, że $R(f^n) < \infty$ dla wszystkich $n > 0$. W takiej sytuacji zeta funkcja Reidemeistera odwzorowania f jest zdefiniowana następująco ([18]).

$$R_f(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(f^n)}{n} z^n\right).$$

Na mocy lematu 4.0.4 możemy zastosować rezultaty z rozdziału 2 do zeta funkcji Reidemeistera odwzorowania ciągłego.

Podobnie, twierdzenie 2.3.10 implikuje dychotomię między wymiernością a istnieniem brzegu naturalnego zeta funkcji Reidemeistera odwzorowania ciągłego.

Twierdzenie 4.0.5. Niech $\tilde{f}_* : \Gamma \to \Gamma$ będzie automorfizmem przeliczalnej abelowej grupy podstawowej Γ przestrzeni X bedącej podgrupą w $\mathbb{Q}^d$, gdzie $d \geqslant 1$. Załóżmy,że Γ jako $R = \mathbb{Z}[t]$-moduł spełnia następujace warunki.

(1) Zbiór stowarzyszonych ideałów pierwszych $\mathrm{Ass}(\Gamma)$ jest skończony i składa się wyłącznie z niezerowych ideałów głównych pierścienia wielomianów $R = \mathbb{Z}[t]$.

(2) Odwzorowanie $g \to (t^j - 1)g$ jest monomorfizmem grupy Γ dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$, (równoważnie $t^j - 1 \notin \mathfrak{p}$ dla każdego $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\Gamma)$ i dla każdego $j \in \mathbb{N}$).

(3) Dla każdego $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\Gamma), m(\mathfrak{p}) = \dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{p})} \Gamma_{\mathfrak{p}} < \infty$, gdzie $\mathbb{K}(\mathfrak{p})$ oznacza ciało ułamków pierścienia $R/\mathfrak{p}$, zaś $G_{\mathfrak{p}} = G \otimes_R K(\mathfrak{p})$.

Wtedy istnieją algebraiczne ciała liczbowe $\mathbb{K}_1, \ldots, \mathbb{K}_n$, zbiory skończonych miejsc $P_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{K}_i)$, $S_i = \mathcal{P}(\mathbb{K}_i) \setminus P_i$ oraz elementy $\xi_i \in \mathbb{K}_i$, z których żaden nie jest pierwiastkiem z jedynki dla każdego $i = 1, \ldots, n$ takie, że

$$R(f^j) = R(\tilde{f}_*^j) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{v \in P_i} |\xi_i^j - 1|_v^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - 1|_{P_i}^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - 1|_{P_i^\infty \cup S_i} \tag{4.1}$$

dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$. Załóżmy ponadto, że ostatni iloczyn w (4.1) składa się ze skończenie wielu miejsc oraz, że $|\xi_i|_v \neq 1$ dla każdego v w zbiorze nieskończonych miejsc P_i^∞ of $\mathbb{K}_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$.
Wtedy zeta funkcja Reidemeistera $R_f(z) = R_{\tilde{f}_*}(z)$ jest albo funkcją wymierną, albo ma brzeg naturalny w postaci swojego okręgu zbieżności, przy czym druga sytuacja zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|\xi_i|_v = 1$ dla pewnego $v \in S_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Rozważmy skończenie generowaną beztorsyjną grupę nilpotentną Γ. Znanym faktem jest, że grupa ta jest jednorodną dyskretną podgrupą jednospójnej nilpotentnej grupy Liego G (jednorodność oznacza, że przestrzeń ilorazowa $M = G/\Gamma$ jest zwarta)[39]. Przestrzeń ilorazową $M = G/\Gamma$ nazywamy *nilrozmaitością*. Ponieważ $\Gamma = \pi_1(M)$ oraz M jest $K(\Gamma, 1)$, to każdy endomorfizm $\phi : \Gamma \to \Gamma$ może być zrealizowany przez odwzorowanie $f : M \to M$ takie, że $f_* = \phi$ i stąd $R(f) = R(\phi)$. Dowolny endomorfizm $\phi : \Gamma \to \Gamma$ może być przedłużony w sposób jednoznaczny do endomorfizmu $F : G \to G$. Niech $\tilde{F} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ będzie endomorfizmem algebry Liego indukowanym z F.

Lemat 4.0.6. [19, Twierdzenie 23], [22, Twierdzenie 5] Niech $\phi : \Gamma \to \Gamma$ będzie oswojonym endomorfizmem skończenie generowanej beztorsyjnej grupy nilpotentnej Γ. Wówczas zeta funkcja Reidemeistera $R_\phi(z) = R_f(z)$ jest funkcją wymierną i spełnia równanie

$$R_\phi(z) = R_f(z) = L_f((-1)^p z)^{(-1)^r}, \tag{4.2}$$

gdzie p jest liczbą wartości własnych $\mu \in Spectr(\tilde{F})$ takich, że $\mu < -1$, zaś r jest liczbą rzeczywistych wartości własnych macierzy $\tilde{F}$, których wartość bezwzględna jest większa niż 1.

Dowód. Niech $f : M \to M$ będzie odwzorowaniem realizującym ϕ na zwartej nilrozmaitości M. Załóżmy, że liczba Reidemeistera $R(f) = R(\phi)$ jest skończona a zatem liczba Lefschetza $L(f) \neq 0$ [22]. Na mocy twierdzenia Anosova [1] jeśli $L(f) \neq 0$, to $N(f) = |L(f)| = R(f)$. Ponieważ $L(f) = \det(\tilde{F} - 1)$ [1], to dla każdego $n \geqslant 1$

$$R(\phi^n) = R(f^n) = |L(f^n)| = |\det(1 - \tilde{F}^n)| =$$

$$= (-1)^{r+pn} \det(1 - \tilde{F}^n) = (-1)^{r+pn} L(f^n).$$

Teza wynika teraz z bezpośrednich obliczeń. $\square$

Rozdział 5

Zeta funkcja Reidemeistera koincydencji

Niech $\phi, \psi : G \to G$ będą endomorfizmami skończenie generowanej grupy G. Elementy $\alpha, \alpha' \in G$ nazywamy $(\phi, \psi) - sprzężonymi$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element $\gamma \in G$ taki, że

$$\alpha' = \psi(\gamma)\alpha\phi(\gamma)^{-1}.$$

Liczbę klas (ϕ, ψ)-sprzężoności nazywamy liczbą Reidemeistera koincydencji endomorfizmów ϕ i ψ i oznaczamy ją przez $R(\phi, \psi)$. Jeśli $\psi = id$, to klasy (ϕ, id)-sprzężoności są po prostu klasami ϕ-sprzężoności w grupie G oraz $R(\phi, id) = R(\phi)$. Liczby Reidemeistera koincydencji $R(\phi, \psi)$ znajdują zastosowanie także między innymi w topologicznej teorii koincydencji Nielsena–Reidemeistera. Głównym obszarem naszych zainteresowań pozostaje jednak ciąg liczb całkowitych $R(\phi^n, \psi^n)$ tworzący współczynniki zeta funkcji Reidemeistera koincydencji oraz badanie własności tej funkcji zdefiniowanej w następujący sposób.

$$R_{\phi,\psi}(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(\phi^n, \psi^n)}{n} z^n\right).$$

Oczywiście, analogicznie jak poprzednio, rozważając zeta funkcję Reidemeistera koincydencji $R_{\phi,\psi}(z)$ za każdym razem zakładać będziemy, że jest ona dobrze określona, tzn. $R(\phi^n, \psi^n,) < \infty$ dla każdego $n > 0$. Innymi słowy, zakładamy, że para endomorfizmów ϕ, ψ jest *oswojona*.

Lemat 5.0.1. Niech $\phi, \psi : G \to G$ będą dwoma automorfizmami. Dwa elementy $x, y \in G$ są $\psi^{-1}\phi$-sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy elementy $\psi(x)$ i $\psi(y)$ są (ψ, ϕ)-sprzężone. Stąd liczby Reidemeistera $R(\psi^{-1}\phi)$ i $R(\phi, \psi)$ są sobie równe. Dla pary wzajemnie komutujących oswojonych automorfizmów $\phi, \psi : G \to G$, zeta funkcja Reidemeistera koincydencji $R_{\phi,\psi}(z)$ jest równa zeta funkcji Reidemeistera $R_{\psi^{-1}\phi}(z)$.

Dowód. Jeśli x i y są $\psi^{-1}\phi$-sprzężone, to istnieje element $g \in G$ taki, że $x = gy\psi^{-1}\phi(g^{-1})$. W takim razie $\psi(x) = \psi(g)\psi(y)\phi(g^{-1})$ a zatem $\psi(x)$ i $\psi(y)$ są (ϕ, ψ)-sprzężone. Stwierdzenie odwrotne wynika z odwrócenia implikacji. $\square$

Każda para automorfizmów $\phi, \psi : \Gamma \to \Gamma$ skończenie generowanej beztorsyjnej grupy nilpotentnej Γ może być wyrażona za pomocą pary homeomorfizmów $f, g : M \to M$ takich, że $f_* = \phi$ i $g_* = \psi$ a stąd $R(g^{-1}f) = R(\psi^{-1}\phi) = R(\phi, \psi)$. Dowolny automorfizm $\psi^{-1}\phi : \Gamma \to \Gamma$ można w sposób jednoznaczny przedłużyć do automorfizmu $L : G \to G$. Niech $\tilde{L} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ będzie odpowiadającym mu automorfizmem algebry Liego indukowanym z L. Lemat 5.0.1 i lemat 4.0.6 implikują następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.0.2. Niech $\phi, \psi : \Gamma \to \Gamma$ będzie parą oswojonych, wzajemnie komutujących automorfizmów skończenie generowanej beztorsyjnej nilpotentnej grupy Γ. Wtedy zeta funkcja Reidemeistera koincydencji $R_{\phi,\psi}(z)$ jest funkcją wymierną i zadaje się wzorem

$$R_{\phi,\psi}(z) = R_{\psi^{-1}\phi}(z) = R_{g^{-1}f}(z) = L_{g^{-1}f}((-1)^p z)^{(-1)^r}, \qquad (5.1)$$

gdzie p jest liczbą wartości własnych $\mu \in Spectr(\tilde{L})$ takich, że $\mu < -1$ a r jest liczbą rzeczywistych wartości własnych macierzy $\tilde{L}$, których wartość bezwzględna jest większa niż 1.

5.1 Dychotomia Pólyi – Carlsona zeta funkcji Reidemeistera koincydencji endomorfizmów nieskończenie generowanych podgrup $\mathbb{Q}^d, d \geqslant 1$

Poniższy paragraf poświęcimy rezultatom dotyczącym dychotomii Pólyi–Carlsona pomiędzy wymiernością i istnieniem brzegu naturalnego zeta funkcji Reidemeistera koincydencji w przypadku endomorfizmów grup abelowych.

Niech $\phi, \psi : G \to G$ będą endomorfizmami przeliczalnej grupy abelowej G będącej podgrupą w $\mathbb{Q}^d$, $d \geqslant 1$ i niech $R = \mathbb{Z}[t_\phi, t_\psi]$ będzie pierścieniem wielomianów. Wtedy grupa G jest naturalnie wyposażona w strukturę R-modułu nad pierścieniem $R = \mathbb{Z}[t_\phi, t_\psi]$, gdzie mnożeniu przez t_ϕ oraz t_ψ odpowiada zastosowanie endomorfizmów ϕ i ψ, tzn. $t_\phi g = \phi(g), t_\psi g = \psi(g)$ i rozszerzenie tego mnożenia w naturalny sposób na wielomiany - dla elementu $g \in G$ i $f = \sum_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2} c_{(n_1,n_2)} t_\phi^{n_1} \cdot t_\psi^{n_2} \in R = \mathbb{Z}[t_\phi, t_\psi]$ definiujemy

$$fg = \sum_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2} c_{(n_1,n_2)} t_\phi^{n_1} \cdot t_\psi^{n_2} g = \sum_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2} c_{(n_1,n_2)} \phi^{n_1}\psi^{n_2}(g),$$

gdzie wszystkie, poza skończoną ilością, współczynniki $c_{(n_1,n_2)} \in \mathbb{Z}$ są równe zeru. Jest to standardowa procedura, szerzej opisana w [51].

Poniższe twierdzenie, dotyczące istnienia dychotomii Pólyi–Carlsona pomiędzy wymiernością zeta funkcji Reidemeistera koincydencji a istnieniem brzegu naturalnego tej funkcji, stanowi główny rezultat niniejszego rozdziału.

Twierdzenie 5.1.1. Niech $\phi, \psi : G \to G$ będą komutującymi endomorfizmami przeliczalnej grupy abelowej G będącej podgrupą w $\mathbb{Q}^d$, gdzie $d \geqslant 1$. Załóżmy, że G jako $R = \mathbb{Z}[t_\phi, t_\psi]$- moduł spełnia następujące warunki.

(1) Zbiór stowarzyszonych ideałów pierwszych $\mathrm{Ass}(G)$ jest skończony i składa się wyłącznie z niezerowych ideałów głównych pierścienia wielomianów $R = \mathbb{Z}[t_\phi, t_\psi]$.

(2) Odwzorowanie $g \to (t_\phi^j - t_\psi^j)g$ jest monomorfizmem grupy G dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$ (równoważnie $t_\phi^j - t_\psi^j \notin \mathfrak{p}$ dla każdego $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(G)$ i dla każdego $j \in \mathbb{N}$).

(3) Dla każdego $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(G)$, $m(\mathfrak{p}) = \dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{p})} G_\mathfrak{p} < \infty$, gdzie $\mathbb{K}(\mathfrak{p})$ oznacza ciało ułamków pierścienia $R/\mathfrak{p}$, zaś $G_\mathfrak{p} = G \otimes_R K(\mathfrak{p})$.

Wtedy istnieją algebraiczne ciała liczbowe $\mathbb{K}_1, \ldots, \mathbb{K}_n$, zbiory skończonych miejsc $P_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{K}_i)$, $S_i = \mathcal{P}(\mathbb{K}_i) \setminus P_i$ oraz elementy $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{K}_i$, $\xi_i^j \neq \eta_i^j$, $i = 1, \ldots, n$ takie, że

$$R(\phi^j, \psi^j) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{v\in P_i} |\xi_i^j - \eta_i^j|_v^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - \eta_i^j|_{P_i}^{-1} = \prod_{i=1}^{n} |\xi_i^j - \eta_i^j|_{P_i^\infty \cup S_i} \qquad (5.2)$$

dla każdego $j \in \mathbb{N}$.

Załóżmy dodatkowo, że ostatni iloczyn w (5.2) składa się ze skończenie wielu miejsc oraz, że $|\xi_i|_v \neq |\eta_i|_v$ dla wszystkich v w zbiorze nieskończonych miejsc P_i^∞ ciała $\mathbb{K}_i$, $i =$

$1, \ldots, n$. Wtedy zeta funkcja Reidemeistera koincydencji $R_{\phi,\psi}(z)$ jest albo wymierna, albo okrąg zbieżności jest naturalnym brzegiem tej funkcji, przy czym druga sytuacja zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|\xi_i|_v = |\eta_i|_v$ dla pewnego $v \in S_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Dowód. W przypadku, gdy ϕ, ψ są endomorfizmami grupy abelowej G, liczba Reidemeistera koincydencji $R(\phi, \psi) = |\operatorname{Coker}(\phi - \psi)| = |G/\operatorname{Im}(\phi - \psi)|$. Ponieważ G jest jednocześnie podgrupą w $\mathbb{Q}^d$, $d \geqslant 1$ oraz zbiór stowarzyszonych ideałów pierwszych $\operatorname{Ass}(G)$ jest skończony i składa się z ideałów pierwszych $\mathfrak{p} \subset R = \mathbb{Z}[t_\phi, t_\psi]$ takich, że $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$, zaś wymiar Krulla $\operatorname{kdim}(R/\mathfrak{p}) = 1$, to ciało ułamków pierścienia $R/\mathfrak{p}$ jest algebraicznym ciałem liczbowym. Po lokalizacji w $U = \mathbb{Z} - \{0\}$, naturalne odwzorowanie $G \to U^{-1}G$ jest monomorfizmem. Wymienione wcześniej założenia (1) - (3) wymuszają, aby $U^{-1}G$ był modułem noetherowskim nad $\mathfrak{Q} = \mathbb{Q}[t_\phi, t_\psi]$. Wobec tego, istnieje filtracja

$$\{0\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = U^{-1}G, \tag{5.3}$$

w której $G_i/G_{i-1} \cong \mathfrak{Q}/\mathfrak{q}_i$ dla ideałów maksymalnych $\mathfrak{q}_1, ..., \mathfrak{q}_n \subset \mathfrak{Q}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ takich, że $\{\mathfrak{q}_i \cap \mathbb{Z}[t_\phi, t_\psi] : 1 \leqslant i \leqslant n\} = \operatorname{Ass}(G)$. Po identyfikacji grupy G z jej obrazem $U^{-1}G$ oraz wyznaczając przekrój łańcucha (5.3) z G otrzymujemy

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = G. \tag{5.4}$$

Zauważmy, że wtedy dla każdego $1 \leq i \leq n$ istnieje indukowana inkluzja

$$\frac{R}{\mathfrak{q}_i \cap R} \hookrightarrow \frac{L_i}{L_{i-1}} \hookrightarrow \frac{G_i}{G_{i-1}} \cong \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{q}_i} \cong \mathbb{K}(\mathfrak{p}_i) = K_i,$$

w której każdy iloraz L_i/L_{i-1} w naturalny sposób staje się modułem nad dziedziną $R/(\mathfrak{q}_i \cap R)$ i zanurza w swoim ciele ułamków K_i, które z kolei można utożsamić z ciałem $\mathfrak{Q}/\mathfrak{q}_i$. Ponadto $N_i = L_i/L_{i-1}$ można traktować jako ideał ułamkowy w $E_i = R/\mathfrak{p}_i$. Na mocy Lematu 2.3.2(1)

$$\left|\frac{L_i}{(t_\phi^j - t_\psi^j)L_i}\right| = \left|\frac{N_i}{(t_\phi^j - t_\psi^j)N_i}\right| \left|\frac{L_{i-1}}{L_{i-1} \cap (t_\phi^j - t_\psi^j)L_i}\right|,$$

gdzie $1 \leq i \leq n$. Weźmy $y \in L_i$ oraz niech ρ oznacza obraz elementu $y \in N_i$ zaś ξ_i oraz η_i będą obrazami elementów t_ϕ oraz t_ψ w E_i. Jeśli $(t_\phi^j - t_\psi^j)y \in L_{i-1}$, to $(\xi_i^j - \eta_i^j)\rho = 0$. Założenie (2) implikuje, że $t_\phi^j - t_\psi^j \notin \mathfrak{p}_i$,więc $(\xi_i^j - \eta_i^j) \neq 0$. Zatem $\rho = 0$ oraz $y \in L_{i-1}$. Wynika z tego, że $L_{i-1} \cap (t_\phi^j - t_\psi^j)L_i = (t_\phi^j - t_\psi^j)L_{i-1}$ i otrzymujemy, że

$$\left|\frac{L_i}{(t_\phi^j - t_\psi^j)L_i}\right| = \left|\frac{N_i}{(t_\phi^j - t_\psi^j)N_i}\right| \left|\frac{L_{i-1}}{(t_\phi^j - t_\psi^j)L_{i-1}}\right|. \tag{5.5}$$

Po zastosowaniu (5.5) do każdego z modułów $L_i, 1 \leq i \leq n$ otrzymujemy

$$|G/(t_\phi^j - t_\psi^j)G| = \prod_{i=1}^{n} |N_i/(t_\phi^j - t_\psi^j)N_i|.$$

Rozważmy teraz pojedynczy czynnik $|N_i/(t_\phi^j - t_\psi^j)N_i|$. Ponieważ E_i jest skończenie generowaną dziedziną, z [13, Twierdzenie 4.14], [43, Twierdzenie 1.1] wynika, że całkowite domknięcie D_i dziedziny E_i w K_i jest skończenie generowaną dziedziną Dedekinda i w takim razie D_i jest skończenie generowany jako E_i-moduł. Możemy traktować $I_i = D_i \otimes_{E_i} N_i$ jako ideał ułamkowy w D_i. Z lematu 2.3.3 oraz lematu 2.3.2(2) otrzymujemy, że $|N_i/(\xi_i^j - \eta_i^j)N_i| = |I_i/(\xi_i^j - \eta_i^j)I_i|$ (patrz [43]). Traktując $I_i/(\xi_i^j - \eta_i^j)I_i$ jako D_i-moduł, znajdując dla niego ciąg kompozycyjny i sukcesywnie lokalizując go w każdym ze stowarzyszonych ideałów pierwszych otrzymujemy, że

$$|I_i/(\xi_i^j - \eta_i^j)I_i| = \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(I_i/(\xi_i^j - \eta_i^j)I_i)} q_{\mathfrak{m}}^{\delta_{\mathfrak{m}}(\xi_i, \eta_i, I_i)},$$

gdzie $q_{\mathfrak{m}} = |D_i/\mathfrak{m}|$ oraz $\delta_{\mathfrak{m}}(\xi_i, \eta_i, I_i) = \dim_{D_i/\mathfrak{m}}(I_i/(\xi_i^j - \eta_i^j)I_i)_{\mathfrak{m}}$. Niech $P_i = \{\mathfrak{m} \in Spec(D_i) : I_{\mathfrak{m}} \neq K_i\}$. Ponieważ $P_i = Q_i = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{K}_i) : |N_i|_v$ jest ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}\}$, to powyższy iloczyn może być indeksowany przez $\mathfrak{m} \in P_i$. Każda lokalizacja $(D_i)_{\mathfrak{m}}$ jest innym pierścieniem waluacyjnym ciała K_i, zaś P_i można utożsamić ze zbiorem skończonych miejsc ciała globalnego K_i. Ponadto, dowolny element z K_i może być zapisany jako $u\pi^k$, gdzie u jest jednością w $(D_i)_{\mathfrak{m}}$, $k \in \mathbb{Z}$, zaś π jest uniformizatorem ideału $(D_i)_{\mathfrak{m}}$. Stąd, jeśli $I_{\mathfrak{m}} \neq K_i$, to istnieje $B \in \mathbb{N}$ takie, że $\pi^{-B} \in I_{\mathfrak{m}}$ oraz $v_{\mathfrak{m}} \geqslant -B$ dla każdego $x \in I_{\mathfrak{m}}$, ale wtedy $I_{\mathfrak{m}} = (D_i)_{\mathfrak{m}}\pi^{-B}$, który jest izomorficzny z $(D_i)_{\mathfrak{m}}$ jako ideał ułamkowy w D_i.

Ponieważ $\delta_{\mathfrak{m}}(\xi_i, \eta_i, D_i) = v_{\mathfrak{m}}(\xi_i^j - \eta_i^j)$, to ostatecznie otrzymujemy, że

$$|I_i/(\xi_i^j - \eta_i^j)I_i| = \prod_{\mathfrak{m} \in P_i} q_{\mathfrak{m}}^{\delta_{\mathfrak{m}}(\xi_i, \eta_i, D_i)} = \prod_{\mathfrak{m} \in P_i} q_{\mathfrak{m}}^{v_{\mathfrak{m}}(\xi_i^j - \eta_i^j)} = \prod_{\mathfrak{m} \in P_i} |\xi_i^j - \eta_i^j|_{\mathfrak{m}}^{-1},$$

gdzie $|\cdot|_{\mathfrak{m}}$ jest znormalizowaną wartością bezwzględną stowarzyszoną z $(D_i)_{\mathfrak{m}}$, co kończy dowód wzoru na liczbę Reidmeistera (5.2).

Niech teraz $S_i^* = \{v \in S_i : |\xi_i|_v \neq |\eta_i|_v\}$, $S_i^{**} = \{v \in S_i : |\xi_i|_v > |\eta_i|_v\}$ oraz

$$f(j) = \prod_{i=1}^{n} \left| \left(\frac{\xi_i}{\eta_i} \right)^j - 1 \right|_{S_i \setminus S_i^*},$$

$$g(j)=\prod_{i=1}^{n}|\eta_i|^j_{P_i^\infty}\left|\left(\frac{\xi_i}{\eta_i}\right)^j-1\right|_{P_i^\infty}\cdot|\eta_i|^j_{S_i}\cdot\left|\left(\frac{\xi_i}{\eta_i}\right)^j-1\right|_{S_i^*}.$$

Zatem $R(\phi^j,\psi^j)=f(j)g(j)$ na mocy drugiego wyrażenia w (5.2). Z własności ultrametryki otrzymujemy, że

$$g(j)=\prod_{i=1}^{n}|\eta_i|^j_{P_i^\infty}\left|\left(\frac{\xi_i}{\eta_i}\right)^j-1\right|_{P_i^\infty}\cdot|\eta_i|^j_{S_i}\cdot\left|\left(\frac{\xi_i}{\eta_i}\right)^j\right|_{S_i^{**}}.$$

Używając odpowiedniego wielomianu symetrycznego możemy rozszerzyć czynnik

$$\prod_{i=1}^{n}\left|\left(\frac{\xi_i}{\eta_i}\right)^j-1\right|_{P_i^\infty}$$

aby przekształcić $g(j)$ do postaci

$$g(j)=\sum_{I\in\mathcal{I}}d_I w_I^j, \tag{5.6}$$

gdzie $\mathcal{I}$ jest zbiorem indeksowanym przez zbiór skończony, $d_I\in\{-1,1\}$, zaś $w_I\in\mathbb{C}$. Zatem na mocy (5.6)

$$R_{\phi,\psi}(z)=\exp\left(\sum_{I\in\mathcal{I}}d_I\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f(j)(w_Iz)^j}{j}\right).$$

Jeśli $S_i\setminus S_i^*=\varnothing$ dla każdego $i=1,...,n$, to $f(j)\equiv 1$ i wtedy zeta funkcja Reidemeistera koincydencji $R_{\phi,\psi}(z)$ jest funkcją wymierną. Załóżmy więc, że $S_i\setminus S_i^*\neq\varnothing$ dla pewnego i. Na mocy lematu 2.3.7, wystarczy pokazać istnienie brzegu naturalnego szeregu

$$\sum_{I\in\mathcal{I}}d_I\sum_{j=1}^{\infty}f(j)(w_Iz)^j.$$

Zauważmy, że $\limsup_{n\to\infty}f(j)^{1/j}=1$ (patrz [5, dowód Lematu 17]). Zatem dla każdego $I\in\mathcal{I}$, szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(j)(w_Iz)^j$$

ma promień zbieżności równy $|w_I|^{-1}$. Ponieważ $|\xi_i|_v\neq|\eta_i|_v$ dla $v\in P_i^\infty$, to istnieje element dominujący w_J w rozwinięciu (5.6) oraz $|w_J|>|w_I|$ dla każdego $I\neq J$. Skoro zaś $|w_J|^{-1}<|w_I|^{-1}$ dla każdego $I\neq J$, to wystarczy pokazać, że okrąg zbieżności $|z|=|w_J|^{-1}$ jest brzegiem naturalnym szeregu $\sum_{j=1}^{\infty}f(j)(w_Iz)^j$. Jest to jednak dokładnie ten przypadek, kiedy okrąg jednostkowy jest brzegiem naturalnym $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)z^j$, co z kolei zostało już omówione w lemacie 2.3.9.

$\square$

Uwaga 5.1.2. Jeśli $\psi = id$, to $R_{\phi,id}(z) = R_\phi(z)$ i zachodzi twierdzenie 2.3.10.

5.2 Przykłady

Niech $G = \mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$ będzie nieskończenie generowaną abelową grupę, zaś $\phi : g \to 6g$ oraz $\psi : g \to 3g$ jej endomorfizmami. Na mocy twierdzenia 5.1.1 oraz po prostych obliczeniach otrzymujemy, że

$$R(\phi^n, \psi^n) = |\operatorname{Coker}(\phi^n - \psi^n)| = |6^n - 3^n| \cdot |6^n - 3^n|_3 = |2^n - 1| \cdot |2^n - 1|_3.$$

Stąd, zeta funkcja Reidemeistera koincydencji jest równa

$$R_{\varphi,\psi}(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|2^n - 1| \cdot |2^n - 1|_3}{n} z^n\right).$$

Używając metody zaprezentowanej przez G. Everesta, V. Stangoe i T. Warda w [14, Lemat 4.1] dla zeta funkcji Artina–Mazura endomorfizmu zwartej abelowej grupy dualnej otrzymujemy, że moduł zeta funkcji Reidemeistera koincydencji można zapisać jako poniższy iloczyn.

$$|R_{\varphi,\psi}(z)| = \left|\frac{1-z}{1-2z}\right| \cdot \left|\frac{1-(2z)^2}{1-z^2}\right|^{1/2} \cdot \left|\frac{1-z^2}{1-(2z)^2}\right|^{1/6} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \left|\frac{1-(2z)^{2\times 3^j}}{1-z^{2\times 3^j}}\right|^{1/3\times 9^j}.$$

Wynika z tego, że szereg określający zeta funkcję Reidemeistera koincydencji$R_{\varphi,\psi}(z)$ ma zera we wszystkich punktach postaci $\frac{1}{2}e^{2\pi ij/3^r}$, $r \geqslant 1$ a więc $|z| = \frac{1}{2}$ jest brzegiem naturalnym zeta funkcji Reidemeistera koincydencji$R_{\varphi,\psi}(z)$.

Rozdział 6

Wymierność zeta funkcji Reidemeistera koincydencji endomorfizmów skończenie generowanych beztorsyjnych grup nilpotentnych

Rozważmy powszechnie znany przykład.

Przykład 6.0.1. [23, Przykład 1.3] Niech $G = (\mathbb{Z}, +)$ będzie nieskończoną grupą cykliczną i niech

$$\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto d_\varphi x \qquad \text{oraz} \qquad \psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto d_\psi x,$$

gdzie $d_\phi, d_\psi \in \mathbb{Z}$. Liczba Reidemeistera koincydencji $R(\phi, \psi)$ endomorfizmów ϕ, ψ grupy abelowej G jest równa mocy grupy ilorazowej $\operatorname{Coker}(\phi - \psi) = G/\operatorname{Im}(\phi - \psi)$ (lub $\operatorname{Coker}(\psi - \phi) = G/\operatorname{Im}(\psi - \phi)$). Zatem

$$R(\phi^n, \psi^n) = \begin{cases} |d_\psi^n - d_\phi^n| & \text{gdy } d_\phi^n \neq d_\psi^n, \\ \infty & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W takim razie para (ϕ, ψ) jest oswojona, gdy $|d_\phi| \neq |d_\psi|$ i wobec tego

$$R_{\phi,\psi}(z) = \frac{1 - d_2 z}{1 - d_1 z},$$

gdzie $d_1 = \max\{|d_\phi|, |d_\psi|\}$ i $d_2 = \frac{d_\phi d_\psi}{d_1}$.

Celem niniejszego rozdziału jest uogólnienie powyższego przykładu na skończenie generowane beztorsyjne grupy nilpotentne. Niech G będzie grupą skończenie generowaną oraz $\phi, \psi : G \to G$ jej endomorfizmami.

Dla dowolnej grupy G definiujemy *k-ty komutator* $\gamma_k(G)$ następująco

$$\gamma_1(G) = G,$$

$$\gamma_{k+1}(G) = [G, \gamma_k(G)].$$

Dla podgrupy H grupy G, definiujemy *izolator* $\sqrt[G]{H}$ podgrupy H w grupie G jako

$$\sqrt[G]{H} = \{g \in G \mid g^n \in H \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\}.$$

Zauważmy, że w ogólności izolator podgrupy H nie musi być podgrupą. Na przykład, izolatorem grupy trywialnej jest zbiór elementów torsyjnych grupy G.

Lemat 6.0.2. [9, lemat 1.1.2, Lemat 1.1.4)] Niech G będzie grupą. Wtedy

(i) dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt[G]{\gamma_k(G)}$ jest całkowicie charakterystyczną podgrupą w G,

(ii) dla każdego $k \in \mathbb{N}$, grupa ilorazowa $G/\sqrt[G]{\gamma_k(G)}$ jest beztorsyjna,

(iii) dla wszystkich $k, l \in \mathbb{N}$ komutator $[\sqrt[G]{\gamma_k(G)}, \sqrt[G]{\gamma_l(G)}] \leq \sqrt[G]{\gamma_{k+l}(G)}$,

(iv) dla wszystkich $k, l \in \mathbb{N}$ takich, że $k \geqslant l$ jeśli $M = \sqrt[G]{\gamma_l(G)}$, to

$$\sqrt[G/M]{\gamma_k(G/M)} = \sqrt[G]{\gamma_l(G)}/M.$$

Dostosowany dolny ciąg centralny grupy G definiujemy jako ciąg

$$G = \sqrt[G]{\gamma_1(G)} \geqslant \sqrt[G]{\gamma_2(G)} \geqslant ... \sqrt[G]{\gamma_k(G)} \geqslant ...,$$

w którym $\gamma_k(G)$ jest k-tym komutatorem grupy G. Dostosowany dolny ciąg centralny stablizuje się wtedy i tylko wtedy, gdy G jest beztorsyjną grupą nilpotentną. Co więcej, wszystkie ilorazy $\sqrt[G]{\gamma_k(G)}/\sqrt[G]{\gamma_{k+1}(G)}$ są beztorsyjne. W szczególności, gdy G jest skończenie generowaną beztorsyjną grupą nilpotentną, to ilorazy te są skończenie generowanymi beztorsyjnymi grupami abelowymi, tzn. dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$\sqrt[G]{\gamma_k(G)}/\sqrt[G]{\gamma_{k+1}(G)} \cong \mathbb{Z}^{d_k}$, dla pewnego $d_k \in \mathbb{N}$.

Niech N będzie normalną podgrupą grupy G, zaś $\phi, \psi \in End(G)$ będą endomorfizmami takimi, że $\phi(N) \subseteq N, \psi(N) \subseteq N$. Oznaczmy obcięcie ϕ do N przez $\phi|_N$, ψ do N przez $\psi|_N$, zaś endomorfizmy indukowane na ilorazie G/N przez ϕ', ψ'odpowiednio. Istnieje wtedy następujący diagram przemienny z dokładnymi wierszami:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi|_N{,}\psi|_N"] & G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi{,}\psi"] & G/N \arrow[r] \arrow[d, "\phi'{,}\psi'"] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & G \arrow[r, "p"] & G/N \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

Niech

$$\mathfrak{R}[\phi|_{\mathfrak{N}}, \psi|_{\mathfrak{N}}] = \{[n_1]_{\phi|_N,\psi|_N}, ..., [n_{R(\phi|_N,\psi|_N)}]_{\phi|_N,\psi|_N}\}$$

będą $(\phi|_N, \psi|_N)$-klasami Reidemeistera oraz

$$\mathfrak{R}[\phi', \psi'] = \{[g_1 N]_{\phi',\psi'}, ..., [g_{R(\phi',\psi')} N]_{\phi',\psi'}\}$$

będą (ϕ', ψ')-klasami Reidemeistera. Zauważmy, że zarówno włożenie i, jak i projekcja p indukują funkcje $\hat{i}, \hat{p}$ na zbiorze klas Reidemeistera w taki sposób, że ciąg

$$\mathfrak{R}[\phi|_N, \psi|_N] \xrightarrow{\hat{i}} \mathfrak{R}[\phi, \psi] \xrightarrow{\hat{p}} \mathfrak{R}[\phi', \psi'] \longrightarrow 0$$

jest dokładny, tzn $\hat{p}$ is surjekcją, zaś $\hat{p}^{-1}[1] = \mathrm{Im}(\hat{i})$, gdzie 1 oznacza element neutralny w grupie G/N [34].

Lemat 6.0.3. Jeśli $R(\phi|_N, \psi|_N) < \infty, R(\phi', \psi')) < \infty$ oraz $N \subseteq Z(G)$, to

$$R(\phi, \psi) \leqslant R(\phi|_N, \psi|_N) R(\phi', \psi').$$

Dowód. Niech $\mathfrak{R}[\phi|_{\mathfrak{R}}, \psi|_{\mathfrak{R}}]$ oraz $\mathfrak{R}[\phi', \psi']$ będą $(\phi|_N, \psi|_N)$-klasami Reidemeistera oraz (ϕ', ψ')-klasami Reidemeistera odpowiednio. Weźmy $g \in G$. Wtedy $gN \in [g_i N]_{\phi',\psi'}$ dla pewnego i, zatem istnieje element $hN \in G/N$ taki, że

$$gN = \psi'(hN) g_i N \phi'(hN)^{-1} = \psi'(h) g_i \phi'(h)^{-1} N.$$

Wynika z tego, że istnieje element $n \in N$ taki, że

$$g = \psi'(h) g_i \phi'(h)^{-1} n.$$

Z kolei $n \in [n_j]_{\phi|_N, \psi|_N}$ dla pewnego j, zatem istnieje element $m \in N$, dla którego

$$n = \psi|_N(m) n_j \phi|_N(m)^{-1}.$$

Skoro $n, m, n_j, \psi|_N(m), \phi|_N(m) \in N \subset Z(G)$, to

$$g = [\psi(hm)](g_i n_j)[\phi(hm)^{-1}],$$

tj. $g \in [g_i n_j]_{\phi,\psi}$. Ponieważ wybraliśmy dowolny element $g \in G$, to

$$R(\phi, \psi) \leqslant R(\phi|_N, \psi|_N) R(\phi', \psi').$$

□

Twierdzenie 6.0.4. Niech N będzie skończenie generowaną beztorsyjną grupą nilpotentną, zaś

$$N = \sqrt[N]{\gamma_1(N)} \geqslant \sqrt[N]{\gamma_2(N)} \geqslant ... \geqslant \sqrt[N]{\gamma_c(N)} \geqslant \sqrt[N]{\gamma_{c+1}(N)} = 1$$

dostosowanym ciągiem centralnym grupy N. Załóżmy, że $R(\phi, \psi) < \infty$ dla pary ϕ, ψ endomorfizmów grupy N oraz $R(\phi_k, \psi_k) < \infty$ dla każdej pary ϕ_k, ψ_k endomorfizmów indukowanych na skończenie generowanych beztorsyjnych abelowych grupach ilorazowych

$$\sqrt[N]{\gamma_k(N)} / \sqrt[N]{\gamma_{k+1}(N)} \cong \mathbb{Z}^{d_k}, d_k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq c,$$

wtedy

$$R(\phi, \psi) = \prod_{k=1}^{c} R(\phi_k, \psi_k). \tag{6.2}$$

$$R(\phi, \psi) = \prod_{k=1}^{c} R(\phi_k, \psi_k).$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy za pomocą indukcji względem długości dostosowanego dolnego ciągu centralnego. Niech $N_k = \sqrt[N]{\gamma_k(N)}$. Jeśli $c = 1$, teza jest oczywista. Rozważmy więc $c > 1$ i załóżmy, że wzór (6.2) zachodzi dla dostosowanego ciągu centralnego o długości $c - 1$. Niech $\phi, \psi \in End(N)$, zatem $\phi(N_c) \subseteq N_c, \psi(N_c) \subseteq N_c$ i wobec tego otrzymujemy poniższy diagram przemienny krótkich ciągów dokładnych:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & N_c & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{p} & N/N_c & \longrightarrow & 1 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_c,\psi_c} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi,\psi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi',\psi'} & & \\
1 & \longrightarrow & N_c & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{p} & N/N_c & \longrightarrow & 1
\end{array},$$

w którym ϕ_c, ψ_c są endomorfizmami indukowanymi na N_c. Iloraz N/N_c jest skończenie generowaną grupą nilpotentną posiadającą ciąg centralny

$$N/N_c = N_1/N_c \geqslant N_2/N_c \geqslant ... \geqslant N_{c-1}/N_c \geqslant N_c/N_c = 1$$

o długości $c-1$. Każdy iloraz tego szeregu jest postaci

$$(N_k/N_c)/(N_{k+1}/N_c) \cong N_k/N_{k+1}$$

oraz, na mocy trzeciego twierdzenia o izomorfizmie, beztorsyjny. Ponadto dla każdej pary endomorfizmów (ϕ'_k, ψ'_k) indukowanej na $(N_k/N_c)/(N_{k+1}/N_c)$ zachodzi

$$R(\phi'_k, \psi'_k) = R(\phi_k, \psi_k).$$

Z założenia wynika, że zarówno $R(\phi', \psi') < \infty$, jak i $R(\phi_c, \psi_c) < \infty$. Niech $[g_1N_c]_{\phi',\psi'}, ..., [g_nN_c]_{\phi',\psi'}$ będą (ϕ', ψ')-klasami Reidemeistera, zaś $[c_1]_{\phi_c,\psi_c}, ..., [c_m]_{\phi_c,\psi_c}$ będą (ϕ'_c, ψ'_c)-klasami Reidemeistera. Ponieważ $N_c \subseteq Z(N)$, to na mocy lematu 6.0.3 otrzymujemy, że $R(\phi, \psi) \leqslant R(\phi_c, \psi_c)R(\phi', \psi')$. Aby udowodnić nierówność w drugą stronę, wystarczy wykazać, że każda klasa $[c_ig_j]_{\phi,\psi}$ odpowiada innej (ϕ, ψ)-klasie Reidemeistera. Wówczas otrzymamy, że

$$R(\phi, \psi) = R(\phi_c, \psi_c)R(\phi', \psi')$$

i teza wynika z założenia indukcyjnego.
Załóżmy, że istnieje element $h \in N$ taki, że

$$c_ig_j = \psi(h)c_ag_b\phi(h)^{-1}.$$

Następnie rzutując na N/N_c otrzymujemy, że

$$g_jN_c = p(c_ig_j) = p(\psi(h)c_ag_b\phi(h)^{-1}) = \psi'(hN_c)(g_bN_c)\phi'(hN_c)^{-1}$$

a zatem $[g_jN_c]_{\phi',\psi'} = [g_bN_c]_{\phi',\psi'}$. Niech teraz

$$c_ig_j = \psi(h)c_ag_j\phi(h)^{-1}.$$

Jeśli $h \in N_c \subseteq Z(N)$, to

$$c_i g_j = \psi(h) c_a \phi(h)^{-1} g_j$$

i w konsekwencji $[c_i]_{\phi_c,\psi_c} = [c_a]_{\phi_c,\psi_c}$. Załóżmy zatem, że $h \notin N_c$ i że N_k jest najmniejszą grupą w ciągu centralnym, zawierającą h. Wtedy

$$\begin{aligned}
c_i g_j = \psi(h) c_a g_j \phi(h)^{-1} &\Leftrightarrow \\
g_j c_i = \psi(h) c_a g_j \phi(h)^{-1} &\Leftrightarrow \\
c_i = g_j^{-1} \psi(h) c_a g_j \phi(h)^{-1} &\Leftrightarrow \\
c_i = g_j^{-1} \psi(h) g_j \phi(h)^{-1} c_a &\Leftrightarrow \\
c_i c_a^{-1} = g_j^{-1} \psi(h) g_j \phi(h)^{-1}
\end{aligned}$$

i stąd

$$\begin{aligned}
c_i c_a^{-1} N_{k+1} &= g_j^{-1} \psi(h) g_j \phi(h)^{-1} N_{k+1} \\
&= [g_j, \psi(h)^{-1}](\psi(h)\phi(h)^{-1}) N_{k+1}.
\end{aligned}$$

Skoro $c_i c_a^{-1} \in N_c \subseteq N_{k+1}$ oraz $[g_j, \psi(h)^{-1}] \in N_{k+1}$, to

$$(\phi_k)(hN_{k+1}) = (\psi_k)(hN_{k+1}).$$

Oznacza to, że zbiór punktów koincydencji $\mathrm{Coin}(\phi'_k, \psi'_k) \neq \{1\}$, z czego wynika, że $R(\phi', \psi') = \infty$, co daje sprzeczność z założeniem. □

Twierdzenie 6.0.5. Niech $\phi, \psi \colon N \to N$ będzie oswojoną parą endomorfizmów skończenie generowanej beztorsyjnej nilpotentnej stopnia C grupy N. Przez $\phi_k, \psi_k \colon G_k \to G_k$, $1 \leqslant k \leqslant c$ oznaczmy oswojone endomorfizmy indukowane na skończenie generowanych beztorsyjnych abelowych grupach ilorazowych

$$G_k = N_k / N_{k+1} = \sqrt[N]{\gamma_k(N)} / \sqrt[N]{\gamma_{k+1}(N)} \cong \mathbb{Z}^{d_k}$$

pochodzących z dostosowanego dolnego ciągu centralnego grupy N dla pewnego $d_k \in \mathbb{N}$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

(1) $R(\phi^n, \psi^n) = \prod_{k=1}^{c} R(\phi_k^n, \psi_k^n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(2) Niech

$$\phi_{k,\mathbb{Q}}, \psi_{k,\mathbb{Q}} \colon G_{k,\mathbb{Q}} \to G_{k,\mathbb{Q}}, 1 \leqslant k \leqslant c$$

oznaczają przedłużenia endomorfizmów ϕ_k, ψ_k do $G_{k,\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G_k \cong \mathbb{Q}^{d_k}$. Załóżmy, że każda para endomorfizmów $\phi_{k,\mathbb{Q}}, \psi_{k,\mathbb{Q}}$ jest jednocześnie diagonalizowalna. Niech ponadto $\xi_{k,1}, \ldots, \xi_{k,d_k}$ i $\eta_{k,1}, \ldots, \eta_{k,d_k}$ będą zespolonymi wartościami własnymi $\phi_{k,\mathbb{Q}}$ oraz $\psi_{k,\mathbb{Q}}$ licząc z krotnościami, uporządkowanymi w taki sposób, że wartościami własnymi odwzorowań $\phi^n_{k,\mathbb{Q}} - \psi^n_{k,\mathbb{Q}}$ są $\xi^n_{k,1} - \eta^n_{k,1}, \ldots, \xi^n_{k,d_k} - \eta^n_{k,d_k}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$R(\phi^n_k, \psi^n_k) = \prod_{i=1}^{d_k} |\xi^n_{k,i} - \eta^n_{k,i}| \tag{6.3}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(3) Załóżmy ponadto, że $|\xi_{k,i}| \neq |\eta_{k,i}|$ dla $1 \leqslant k \leqslant c$, $1 \leqslant i \leqslant d_k$. Jeśli ϕ, ψ jest oswojoną parą endomorfizmów grupy N oraz $\phi_{k,\mathbb{Q}}, \psi_{k,\mathbb{Q}}$, $1 \leqslant k \leqslant c$ są jednocześnie diagonalizowalnymi parami endomorfizmów grupy $G_{k,\mathbb{Q}}$, to zeta funkcja Reidemeistera koincydencji $R_{\phi,\psi}(z)$ jest funkcją wymierną.

Dowód. Liczba Reidemeistera koincydencji $R(\phi, \psi)$ endomorfizmów ϕ, ψ grupy abelowej G jest równa mocy grupy ilorazowej $\mathrm{Coker}(\phi - \psi) = G/\mathrm{Im}(\phi - \psi)$ (lub $\mathrm{Coker}(\psi - \phi) = G/\mathrm{Im}(\psi - \phi)$). Niech $A_k, B_k \in M_{d_k}(\mathbb{Z})$, $1 \leqslant k \leqslant c$ będą odpowiednimi macierzami endomorfizmów $\phi_k, \psi_k \colon G_k \to G_k$ indukowanych na skończenie generowanych beztorsyjnych abelowych grupach ilorazowych $G_k = N_k/N_{k+1} \cong \mathbb{Z}^{d_k}$. Istnieje wtedy macierz diagonalna o współczynnikach calkowitych $C_k = \mathrm{diag}(c_1, ..., c_{d_k})$ taka, że

$$C_k = M_k(A_k - B_k)N_k,$$

gdzie M_k i N_k są macierzami unimodularnymi. Wtedy

$$\det C_k = \det(A_k - B_k)$$

i rząd $\mathrm{Coker}(\phi_k - \psi_k)$ jest równy rzędowi grupy $\mathbb{Z}/c_1\mathbb{Z} \oplus ..... \oplus \mathbb{Z}/c_{d_k}\mathbb{Z}$. Stąd

$$|\,\mathrm{Coker}(\phi_k - \psi_k)| = |c_1 \cdots c_{d_k}| = |\det C_k| = |\det(\phi_k - \psi_k)|.$$

Wtedy

$$R(\phi^n_k, \psi^n_k) = |\,\mathrm{Coker}(\phi_k - \psi_k)| = |\det(\phi_k - \psi_k)| = |\det(\phi_{k,\mathbb{Q}} - \psi_{k,\mathbb{Q}})| = \prod_{i=1}^{d_k} |\xi^n_{k,i} - \eta^n_{k,i}|$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant c$. Badając poszczególne czynniki w

$$R(\phi_k^n, \psi_k^n) = \prod_{i=1}^{d_k} |\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n|,$$

gdzie $1 \leqslant k \leqslant c$, wykażemy wymierność funkcji $R_{\phi,\psi}(z)$. Zespolone wartości własne $\xi_{k,i} \in \mathrm{Spectr}(\phi_{k,\mathbb{Q}})$, $\eta_{k,i} \in \mathrm{Spectr}(\psi_{k,\mathbb{Q}})$, występują w parach wraz ze swoimi sprzężeniami zespolonymi $\overline{\xi_{k,i}}$, $\overline{\eta_{k,i}}$. Ponadto pary takie można ustawić obok siebie w procesie jednoczesnej diagonalizacji w następujący sposób.

Niech $\phi_{k,\mathbb{C}}, \psi_{k,\mathbb{C}}$ oznacza endomorfizm indukowany na przestrzeni wektorowej $V = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} G \cong \mathbb{C}^{d_k}$. Jeśli $v \in V$ jest jednocześnie wektorem własnym odwzorowania $\phi_{k,\mathbb{C}}$ odpowiadającym zespolonej wartości własnej ξ_{k,d_k} i wektorem własnym odwzorowania $\psi_{k,\mathbb{C}}$ odpowiadającym wartości własnej η_{k,d_k}, to istnieje $w \in V$ taki, że w jest jednocześnie wektorem własnym odwzorowania $\phi_{k,\mathbb{C}}$ odpowiadającym wartości własnej $\overline{\xi_{k,d_k}} \neq \xi_{k,d_k}$ i wektorem własnym odwzorowania $\psi_{k,\mathbb{C}}$ odpowiadającym wartości własnej $\overline{\eta_{k,d_k}}$ (która może być równa η_{k,d_k}).

Możemy więc zacząć tworzyć flagę $\{\phi, \psi\}$-niezmienniczych podprzestrzeni przestrzeni V, w której $\{0\} \subset \langle v \rangle \subset \langle v, w \rangle$ i postępować z $V/\langle v, w \rangle$ indukcyjnie, aby uzyskać pozostałe elementy tej rodziny.

Jeśli co najmniej jedna z wartości własnych $\xi_{k,i}, \eta_{k,i}$ nie jest rzeczywista, to takie wartości własne odwzorowań $\phi_{\mathbb{Q}}$ i $\psi_{\mathbb{Q}}$ występują w parze. Ponadto $\xi_{k,j} = \overline{\xi_{k,i}}, \eta_{k,j} = \overline{\eta_{k,i}}$ dla pewnego $j \neq i$. Wtedy

$$\left|\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n\right| \left|\xi_{k,j}^n - \eta_{k,j}^n\right| = \left|\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n\right|^2 = \left(\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n\right) \cdot \left(\overline{\xi_{k,i}}^n - \overline{\eta_{k,i}}^n\right).$$

Jeśli obie $\xi_{k,i}$ oraz $\eta_{k,i}$ są rzeczywistymi wartościami własnymi odwzorowań $\phi_{\mathbb{Q}}$ i $\psi_{\mathbb{Q}}$, to dokładnie jak w Przykładzie 6.0.1 otrzymujemy

$$|\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n| = \delta_{1,k,i}^n - \delta_{2,k,i}^n,$$

gdzie $\delta_{1,k,i} = \max\{|\xi_{k,i}|, |\eta_{k,i}|\}$ oraz $\delta_{2,k,i} = \frac{\xi_{k,i} \cdot \eta_{k,i}}{\delta_{1,k,i}}$. Stąd, używając odpowiedniego wielomianu symetrycznego, możemy rozszerzyć iloczyn $R(\phi_k^n, \psi_k^n)$, $1 \leqslant k \leqslant c$ tak, aby dla liczb $R(\phi^n, \psi^n)$ otrzymać wyrażenie postaci

$$R(\phi^n, \psi^n) = \prod_{k=1}^{c} R(\phi_k^n, \psi_k^n) = \prod_{k=1}^{c} \prod_{i=1}^{d_k} |\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n| = \sum_{j \in J} c_j w_j^n, \tag{6.4}$$

gdzie J jest skończonym zbiorem indeksów, $c_j \in \{-1, 1\}$, zaś $\{w_j \mid j \in J\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. W konsekwencji, zeta funkcja Reidemeistera koincydencji może być zapisana jako

$$R_{\phi,\psi}(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(\phi^n, \psi^n)}{n} z^n\right) = \exp\left(\sum_{j\in J} c_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w_j z)^n}{n}\right).$$

z czego natychmiast wynika, że $R_{\phi,\psi}(z) = \prod_{j\in J}(1 - w_j z)^{-c_j}$ jest funkcją wymierną. $\square$

Rozdział 7

Dynamiczne zeta funkcje i przestrzenie reprezentacji

Bardzo dobrze znanymi faktami z teorii liczb są Małe Twierdzenie Fermata oraz Twierdzenie Eulera. Twierdzenia te zostały uogólnione i wykazano (patrz [59]), że dla dowolnych $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ zachodzą następujące kongruencje Gaussa

$$\sum_{d|n} \mu(d) a^{n/d} \equiv 0 \mod n,$$

gdzie $\mu(d)$ oznacza funkcję Möbiusa, tj.

$$\mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } d = 1, \\ (-1)^k & \text{jesli } d \text{ jest iloczynem } k \text{ różnych liczb pierwszych} \\ 0 & \text{jeśli } d \text{ nie jest bezkwadratowe.} \end{cases}$$

Rozważmy liczby Reidemeistera teorii reprezentacji $RT(\phi^n)$. Tworzą one współczynniki szeregu zeta funkcji teorii reprezentacji $RT_\phi(z)$. Po utożsamieniu współczynników tej funkcji z liczbą punktów okresowych układu dynamicznego oraz wykorzystując twierdzenia Möbiusa o odwracaniu (np. [19], [27]), otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.0.1. [29, Twierdzenie 2.7] Załóżmy, że $RT(\phi^n) < \infty$ dla każdego $n > 0$. Wtedy dla liczb Reidemeistera teorii reprezentacji prawdziwe są poniższe kongruencje Gaussa

$$\sum_{d|n} \mu(d) \cdot RT(\phi^{n/d}) \equiv 0 \mod n,$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\mu(d)$ oznacza funkcję Möbiusa. Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe także dla $RT^f(\phi^n)$ oraz $RT^{ff}(\phi^n)$.

Niech $\sigma : X \to X$ będzie odwzorowaniem zbioru X w siebie. Przez $\mathrm{Fix}(\sigma^n)$ oznaczmy zbiór punktów stałych odwzorowania σ^n, tj. punktów okresowych okresu n odwzorowania σ. Załóżmy też, że $|\mathrm{Fix}(\sigma^n)| < \infty$ dla każdego $n > 0$. Wtedy zeta funkcję Artina–Mazura definiujemy następująco

$$AM_\sigma(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Fix}(\sigma^n)|}{n} z^n\right).$$

Wykorzystując rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $\log(1-z^p)$, funkcja $AM_\sigma(z)$ może być także zapisana jako iloczyn Eulera [3] indeksowany wszystkimi pierwotnymi orbitami okresowymi $\tau = \{x_\tau, \sigma(x_\tau), \ldots, \sigma^{p-1}(x_\tau)$, gdzie $p = p(\tau)$ takie, że $\sigma^p(x_\tau) = x_\tau$ oraz $\sigma^k(x_\tau) \neq x_\tau$ dla $0 < k < p$ w następujący sposób

$$AM_\sigma(z) = \prod_{\tau\,-\,\text{pierwotna orbita okresowa}} \frac{1}{1 - z^{p(\tau)}}. \tag{7.1}$$

Elementy pierwotnej orbity okresowej o długości p nazywamy elementami p*-okresowymi*. Jeśli $|X| < \infty$, to zeta funkcja Artina–Mazura $AM_\sigma(z)$ jest wymierna. W przypadku, gdy σ jest bijekcją, zaś X skończony, to spełnia ona także poniższe równanie funkcyjne

$$AM_\sigma(1/z) = (-z)^{|X|} \det(\sigma_C) AM_\sigma(z), \tag{7.2}$$

gdzie $\sigma_C : C(X) \to C(X)$ jest indukowanym odwzorowaniem liniowym i $C(X) \cong \mathbb{C}^{|X|}$ [58]. Równanie (7.2) można również uogólnić na przypadek, gdy σ nie jest bijekcją w następujący sposób

$$AM_\sigma(1/z) = \prod_\tau \frac{1}{1 - z^{-p(\tau)}} = \prod_\tau \frac{-z^{p(\tau)}}{1 - z^{p(\tau)}} = \prod_\tau (-z^{p(\tau)}) \prod_\tau \frac{1}{1 - z^{p(\tau)}} = (-1)^a z^b AM_\sigma(z), \tag{7.3}$$

gdzie a jest liczbą orbit pierwotnych, zaś b jest liczbą elementów okresowych [19]. Jeśli z kolei σ jest bijekcją, to każdy punkt jest okresowy i $b = |X|$ a ponieważ

$$\det(\sigma_C) = \prod_\tau (-1)^{p(\tau)-1} = \prod_\tau (-1)^{p(\tau)} \cdot (-1)^a = (-1)^{|X|} \cdot (-1)^a$$

to w konsekwencji otrzymujemy równanie (7.2).

Niech $Z(\phi)$ oznacza jedną z liczb $RT(\phi)$, $RT^f(\phi)$, $RT^{ff}(\phi)$, $AM^f(\phi)$ oraz

$$Z_\phi(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z(\phi^n)}{n} z^n\right)$$

będzie jedną z zeta funkcji $AM^f_\phi(z)$, $RT_\phi(z)$, $RT^f_\phi(z)$, $RT^{ff}_\phi(z)$.

Twierdzenie 7.0.2. Niech G będzie grupą, zaś $\phi : G \to G$ będzie okresowym automorfizmem o najmniejszym okresie m. Wówczas zeta funkcja $Z_\phi(z)$ zadaje się wzorem

$$Z_\phi(z) = \prod_{d|m} \sqrt[d]{(1-z^d)^{-P(d)}},$$

w którym iloczyn jest indeksowany przez wszystkie dzielniki d okresu m, zaś

$$P(d) = \sum_{d_1|d} \mu(d_1) Z(\phi^{d|d_1}) \in \mathbb{Z}.$$

Dowód. Ponieważ $\phi^m = id$, to $(\widehat{\phi})^m = id$ oraz z założenia $Z(\phi^j) = Z(\phi^{m+j})$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Jeśli $(k, m) = 1$, to istnieją liczby $t, q \in \mathbb{Z}_+$ takie, że $kt = mq + 1$. Zatem $(\phi^k)^t = \phi^{kt} = \phi^{mq+1} = \phi^{mq}\phi = (\phi^m)^q\phi = \phi$. W konsekwencji $Z(\phi^k) = Z(\phi)$. Z tego samego powodu $Z(\phi^d) = Z(\phi^{di})$ o ile $(i, m/d) = 1$ dla $d|m$. Korzystając otrzymanych w ten sposób ciągów równych liczb, drogą bezpośrednich obliczeń otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} Z_\phi(z) &= \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{Z(\phi^i)}{i} z^i\right) = \exp\left(\sum_{d|m}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(d)}{d} \cdot \frac{z^{di}}{i}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{d|m} \frac{P(d)}{d} \cdot \log(1-z^d)\right) = \prod_{d|m} \sqrt[d]{(1-z^d)^{-P(d)}} \end{aligned}$$

gdzie liczby całkowite $P(d)$ wyznaczane są rekurencyjnie według wzoru

$$P(d) = Z(\phi^d) - \sum_{d_1|d; d_1 \neq d} P(d_1). \tag{7.4}$$

Jeśli dodatkowo (7.4) przedstawimy w postaci $Z(\phi^d) = \sum_{d_1|d} P(d_1)$ i zastosujemy wzór inwersyjny Möbiusa, to

$$P(d) = \sum_{d_1|d} \mu(d_1) \cdot Z(\phi^{d/d_1}),$$

gdzie μ oznacza funkcję Möbiusa. □

Wniosek 7.0.3. Jeśli zdefiniowany w twierdzeniu 7.0.2 okres jest liczbą pierwszą, to

$$Z_\phi(z) = \frac{1}{(1-z)^{Z(\phi)}} \cdot \sqrt[m]{(1-z^m)^{Z(\phi)-Z(\phi^m)}}.$$

Zauważmy, że zgodnie z definicją, $RT_\phi(z)$ (oraz $RT^f_\phi(z)$, $RT^{ff}_\phi(z)$ odpowiednio) jest zeta funkcją Artina-Mazura odwzorowania $\widehat{\phi}$ na $\widehat{G}^\phi$ (oraz $\widehat{G}^\phi_f$, $\widehat{G}^\phi_{ff}$ odpowiednio) zadaną wzorem (7.1).

Twierdzenie 7.0.4. Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem grupy G. Załóżmy, że przestrzeń $\widehat{G}^\phi$ (oraz $\widehat{G}^\phi_f$, $\widehat{G}^\phi_{ff}$ odpowiednio) jest skończona. Wtedy zeta funkcja $RT_\phi(z)$ jest wymierna i spełnia równanie funkcyjne

$$RT_\phi\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^a z^b RT_\phi(z),$$

gdzie a oznacza liczbę pierwotnych $\widehat{\phi}$-orbit okresowych elementów z $\widehat{G}^\phi$, zaś b jest liczbą elementów okresowych przestrzeni $\widehat{G}^\phi$. W szczególności

$$RT_\phi(z) = \prod_{[\gamma]} \frac{1}{1-z^{\#[\gamma]}},$$

gdzie iloczyn indeksowany jest przez pierwotne orbity okresowe układu dynamicznego $(\widehat{\phi})^n$ na $\widehat{G}^\phi$. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla $RT^f_\phi(z)$, $RT^{ff}_\phi(z)$ oraz $AM^f_\phi(z)$.

Dowód. Element przestrzeni $\widehat{G}^\phi$ nazywamy okresowym, jeżeli jest on punktem stałym pewnej iteracji odwzorowania $\widehat{\phi}$. Element okresowy γ jest punktem stałym odwzorowania $\widehat{\phi}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba orbit γ dzieli n. Wobec tego

$$RT(\phi^n) = \sum_{\substack{\gamma \text{ okresowe} \\ \#[\gamma]|n}} 1 = \sum_{\substack{[\gamma] \text{ takie że,} \\ \#[\gamma]|n}} \#[\gamma]$$

a zatem

$$\begin{aligned} RT_\phi(z) &= \exp\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{RT(\phi^n)}{n} z^n\right) = \exp\left(\sum_{[\gamma]} \sum_{\substack{n=1 \\ \#[\gamma]|n}}^\infty \frac{\#[\gamma]}{n} z^n\right) \\ &= \prod_{[\gamma]} \exp\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{\#[\gamma]}{\#[\gamma]n} z^{\#[\gamma]n}\right) = \prod_{[\gamma]} \exp\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} z^{\#[\gamma]n}\right) \\ &= \prod_{[\gamma]} \exp\left(-\log\left(1-z^{\#[\gamma]}\right)\right) = \prod_{[\gamma]} \frac{1}{1-z^{\#[\gamma]}}. \end{aligned}$$

Ponadto

$$
\begin{aligned}
RT_\phi\left(\frac{1}{z}\right) &= \prod_{[\gamma]} \frac{1}{1 - z^{-\#[\gamma]}} = \prod_{[\gamma]} \frac{z^{\#[\gamma]}}{z^{\#[\gamma]} - 1} = \prod_{[\gamma]} \frac{-z^{\#[\gamma]}}{1 - z^{\#[\gamma]}} \\
&= \prod_{[\gamma]} -z^{\#[\gamma]} RT_\phi(z) = (-1)^{\#\{[\gamma]\}} z^{\sum \#[\gamma]} RT_\phi(z).
\end{aligned}
$$

□

7.1 Przykłady

Przykład 7.1.1. Prostym przykładem do twierdzenia 7.0.4 jest grupa skończona.

Przykład 7.1.2. Niech G będzie grupą lokalnie zwartą. Następujące stwierdzenia są równoważne [4].

(1) G ma własność Kazhdana (T).

(2) 1_G jest izolowana w $\widehat{G}$.

(3) Każda skończenie wymiarowa nieprzywiedlna reprezentacja unitarna grupy G jest izolowana w $\widehat{G}$.

(4) Istnieją skończenie wymiarowe nieprzywiedlne reprezentacje unitarne grupy G izolowane w $\widehat{G}$.

Wynika z tego, że dla endomorfizmu lokalnie zwartej grupy G z własnością Kazhdana (T) zeta funkcje $RT_\phi^f(z)$ oraz $AM_\phi^f(z)$ są sobie równe.

Przyjrzyjmy się teraz przykładom do Twierdzenia 7.0.4 dla grup dyskretnych wykazujących pewne ekstremalne własności. Niech G będzie nieskończoną grupą o skończonej liczbie klas sprzężoności.

Przykład 7.1.3. W przypadku grupy Osina [47] istnieje tylko trywialna (tj. jednowymiarowa) skończenie wymiarowa nieprzywiedlna reprezentacja. Istotnie, grupa Osina jest nieskończoną skończenie generowaną grupą mającą dokładnie dwie klasy sprzężoności. Wszystkie nietrywialne elementy tej grupy są sprzężone a zatem jest to grupa prosta (tzn. nie ma nietrywialnych podgrup normalnych). W takim razie grupa Osina nie jest rezydualnie skończona a zatem, na mocy twierdzenia Mal'ceva, nie jest liniowa i nie ma skończenie wymiarowych nieprzywiedlnych reprezentacji unitarnych, których jądro jest trywialne.

Ponieważ G jest prosta, to jedyną skończenie wymiarową nieprzywiedlną reprezentacją unitarną mającą nietrywialne jądro, jest reprezentacja trywialna. Zauważmy ponadto że grupa Osina jest non-amenable, zawiera grupę wolną o dwóch generatorach F_2 i ma wzrost eksponencjalny.

Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem grupy Osina G. Wtedy $RT^f(\phi^n) = RT^{ff}(\phi^n) = 1$ dla wszystkich $n > 0$. Wynika z tego, że dla dowolnego endomorfizmu grupy Osina G zeta funkcje

$$RT^f_\phi(z) = RT^{ff}_\phi(z) = \frac{1}{1-z}$$

są wymierne.

Przykład 7.1.4. Jedne z pierwszych przykładów nieskończonych skończenie generowanych grup okresowych (tzn. każdy nietrywialny element jest torsyjny) o dokładnie p klasach sprzężoności (dla wystarczająco dużych p), zostały skonstruowane przez Ivanova [25] jako granice grup hiperbolicznych. W przeciwieństwie do grupy Osina, która jest beztorsyjna, grupa Ivanowa jest grupą okresową nieskończoną o dwóch generatorach. Grupa Ivanowa G jest również grupą prostą [25]. Argumenty na wymierność zeta funkcji reprezentacji są analogiczne jak przypadku grupy Osina.

Przykład 7.1.5. G. Higman, B. H. Neumann oraz H. Neumann udowodnili [53], że dowolną nieskończoną lokalnie nieskończoną (tj. każdy element, za wyjątkiem jedynki, ma nieskończony rząd) przeliczalną grupę G można zanurzyć w przeliczalną grupę G^*, w której wszystkie elementy, oprócz jedności, są ze sobą sprzężone. Również i w tym przypadku dalsze rozważania dotyczące wymierności zeta funkcji reprezentacji są analogiczne jak w przypadku grupy Osina.

7.2 Skręcone twierdzenie Burnside'a–Frobeniusa i zeta funkcje typu Reidemeistera

Pierwsze sformułowanie TBFT (Twisted Burnside–Frobenius Theorem, czyli skręconego twierdzenia Burnsid'a–Frobeniusa), autorstwa A. Fel'shtyna i R. Hilla mówi, że liczba Reidemeistera $R(\phi)$ jest równa liczbie stałych nieprzywiedlnych reprezentacji unitarnych, jeśli jedna z nich jest skończona. Zostało ono udowodnione dla automorfizmów grup abelowych, zwartych oraz grup będących półproduktem grupy abelowej i skończonej

[20, 21, 26]. W [28] sformułowano kontrprzykład dla TBFT, co doprowadziło do sformułowania kolejnej wersji tego twierdzenia tj. TBFT$_f$, w którym zakładamy, że jeśli $R(\phi) < \infty$, to pokrywa się ona z liczbą skończenie wymiarowych nieprzywiedlnych reprezentacji $\rho \sim \rho \circ \phi$. TBFT$_f$ zostało udowodnione dla grup policyklicznych (dla automorfizmów w [25] i dla endomorfizmów w [27]). W [26] wykazano, że TBFT$_f$ nie jest prawdziwe dla pewnych nieskończonych grup o skończonej liczbie (zwykłych) klas sprzężoności. Z kolei w [55] podano kontrprzykład dla TBFT$_f$ znajdujący się wśród nieskończenie generowanych rezydualnie skończonych grup.

Definicja 7.2.1. Postępując jak w [27], możemy stwierdzić, że TBFT (oraz TBFT_f, TBFT_{ff} odpowiednio) zachodzi dla endomorfizmu $\phi : G \to G$ i jego iteracji, jeśli $R(\phi^n) < \infty$ i $R(\phi^n)$ pokrywają się z liczbą $\widehat{\phi}^n$-**f**-punktów przestrzeni $\widehat{G}$ (oraz $\widehat{G}_f$, $\widehat{G}_{ff}$ odpowiednio) dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Wprost z tej definicji wynika następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 7.2.2. [29, Stwierdzenie 2.8] Załóżmy, że $\phi : G \to G$ jest endomorfizmem grupy G, takim że $R(\phi) < \infty$. Jeśli dla pary (G, ϕ) zachodzi TBFT (oraz TBFT$_f$ odpowiednio), to $R(\phi) = RT(\phi)$ (oraz $R(\phi) = RT^f(\phi) = RT^{ff}(\phi)$ odpowiednio). Jeżeli powyższe założenia są spełnione także dla wszystkich iteracji ϕ^n, $n > 0$, to $R_\phi(z) = RT_\phi(z)$ (oraz $R_\phi(z) = RT_\phi^f(z) = RT_\phi^{ff}(z)$).

7.3 Endomorfizmy skończenie generowanych grup abelowych

Rozważmy skończenie generowaną abelową grupę G. Niech G^{finite} oznacza skończoną podgrupę grupy G składającej się z elementów torsyjnych, zaś beztorsyjną grupę ilorazową G/G^{finite} oznaczmy przez G^∞. Ponieważ obraz elementu torsyjnego także jest elementem torsyjnym, funkcja $\phi : G \to G$ indukuje następujące odwzorowania

$$\phi^{finite} : G^{finite} \longrightarrow G^{finite}, \quad \phi^\infty : G^\infty \longrightarrow G^\infty.$$

Twierdzenie 7.3.1. Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem skończenie generowanej grupy abelowej. Wtedy

$$Z(\phi^n) =\mid L(\hat{\phi}^n) \mid,$$

gdzie $L(\hat{\phi}^n)$ jest liczbą Lefschetza odwzorowania $\hat{\phi} : \hat{G} \to \hat{G}$. Wynika z tego, że zeta funkcja $Z_\phi(z)$ jest wymierna oraz

$$Z_\phi(z) = L_{\hat{\phi}}(\sigma z)^{(-1)^r},$$

gdzie p jest liczbą rzeczywistych wartości własnych $\lambda \in \mathrm{Spectr}(\phi^\infty)$ takich, że $\lambda < -1$, zaś $\sigma = (-1)^p$ oraz r jest liczbą rzeczywistych wartości własnych $\lambda \in \mathrm{Spectr}(\phi^\infty)$ takich, że $\mid \lambda \mid > 1$. Jeśli ponadto G jest skończona, to

$$Z(\phi^n) = L(\hat{\phi}^n) \text{ i } Z_\phi(z) = L_{\hat{\phi}}(z).$$

Dowód. Jeśli G jest skończenie generowaną grupą abelową, to wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne są jednowymiarowe i

$$RT(\phi^n) = RT^f(\phi^n) = RT^{ff}(\phi^n) = AM^f(\phi^n).$$

W przypadku gdy G jest skończoną grupą abelową, to $\hat{G}$ jest dyskretnym zbiorem skończonym a zatem liczba punktów stałych ϕ^n jest równa liczbie Lefschetza $L(\hat{\phi^n})$. Jeśli zaś G jest skończenie generowaną wolną grupą abelową, to $\hat{G}$ jest torusem wymiaru równego randze grupy G. Ponadto, przestrzeń unitarno dualna dowolnej skończenie generowanej dyskretnej grupy abelowej jest sumą prostą torusa i grupy skończonej. Jeżeli G jest skończenie generowaną grupą abelową, to wystarczy pokazać, że $Z(\phi^n) = |L(\hat{\phi}^n)|$. Bez straty ogólności, weźmy $n = 1$. Załóżmy ponadto, że liczba $Z(\phi)$ jest skończona a zatem punkty stałe odwzorowania $\hat{\phi}$ tworzą zbiór dyskretny. W takim razie

$$L(\hat{\phi}) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}\,\hat{\phi}} \mathrm{ind}(\hat{\phi}, x).$$

Ponieważ odwzorowanie ϕ jest endomorfizmem grupy, element $0 \in \hat{G}$ jest zawsze punktem stałym. Niech x będzie dowolnym punktem stałym odwzorowania $\hat{\phi}$. Wtedy istnieje diagram przemienny

$$\begin{array}{cccccc}
g & \hat{G} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \hat{G} & g \\
\updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \\
g + x & \hat{G} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \hat{G} & g + x
\end{array}$$

w którym pionowe strzałki są przesunięciami o x. Ponieważ przeprowadzają one 0 na x, to

$$\mathrm{ind}(\hat{\phi}, x) = \mathrm{ind}(\hat{\phi}, 0).$$

Wynika z tego, że wszystkie punkty stałe są tego samego indeksu. Wystarczy teraz pokazać, że $\mathrm{ind}(\hat{\phi}, 0) = \pm 1$, ale to wynika z faktu, że odwzorowanie torusa

$$\hat{\phi} : \hat{G}_0 \to \hat{G}_0$$

podnosi się do odwzorowania liniowego nakrycia uniwersalnego, które w tym przypadku jest jednocześnie algebrą Liego grupy $\hat{G}$. Indeks jest znakiem wyznacznika odwzorowania $1 - \hat{\phi}$. Wyznacznik ten jest niezerowy, ponieważ z założenia o skończoności liczby $Z(\phi)$, jądro odwzorowania $1 - \hat{\phi}$ także musi być skończone. Gdy $\det(1 - \hat{\phi}) = 0$, to $\mathrm{Ker}(1 - \hat{\phi})$ jest podgrupą dodatniego wymiaru w $\hat{G}$ a zatem nieskończoną. Zatem

$$Z(\phi^n) = \mid L(\hat{\phi}^n) \mid = (-1)^{r+pn} L(\hat{\phi}^n)$$

dla każdego $n > 0$ [19]. Wobec tego

$$Z_\phi(z) = L_{\hat{\phi}}(\sigma z)^{(-1)^r}$$

jest wymierna. □

7.3.1 Równanie funkcyjne

W celu otrzymania równania funkcyjnego dla zeta funkcji typu Reidemeistera, przypomnijmy równanie funkcyjne zeta funkcji Lefschetza.

Lemat 7.3.2. [12], [33, Stwierdzenie 8] Niech M będzie domkniętą orientowalną rozmaitością wymiaru m oraz niech $f : M \to M$ będzie ciągłym odwzorowaniem stopnia d. Wtedy

$$L_f\left(\frac{\alpha}{dz}\right) = \epsilon\,(-\alpha dz)^{(-1)^m \chi(M)}\, L_f(\alpha z)^{(-1)^m}$$

gdzie $\alpha = \pm 1$, zaś $\epsilon \in \mathbb{C}$ jest niezerową stałą taką, że jeśli $|d| = 1$ to $\epsilon = \pm 1$.

Twierdzenie 7.3.3 (Równanie Funkcyjne)**.** Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem skończenie generowanej grupy abelowej rangi $\geqslant 1$. Wtedy zeta funkcja $Z_\phi(z)$. wszędzie tam gdzie jest zdefiniowana, spełnia następujące równanie funkcyjne

$$Z_\phi\left(\frac{1}{dz}\right) = Z_\phi(z)^{(-1)^m} \epsilon^{(-1)^r},$$

gdzie d jest stopniem odwzorowania $\hat{\phi}$, $m = \dim \hat{G}$, $\epsilon \in \mathbb{C}^\times$ jest stałą, p jest liczbą rzeczywistych, większych niż 1, wartości własnych odwzorowania ϕ^∞, zaś r jest liczbą rzeczywistych wartości własnych $\lambda \in \mathrm{Spectr}(\phi^\infty)$ takich, że $\mid \lambda \mid > 1$. Jeśli zaś $|d| = 1$, to $\epsilon = \pm 1$.

Dowód. Zeta funkcja Reidemeistera reprezentacji spełnia równanie $Z_\phi(z) = L_{\hat{\phi}}(\sigma z)^{(-1)^r}$. Na mocy Lematu 7.3.2 otrzymujemy

$$Z_\phi\left(\frac{1}{dz}\right) = L_{\hat{\phi}}\left(\frac{\sigma}{dz}\right)^{(-1)^r} = \left(\epsilon(-\sigma dz)^{(-1)^m \chi(\hat{G})} L_{\hat{\phi}}(\sigma z)^{(-1)^m}\right)^{(-1)^r} =$$
$$= Z_\phi(z)^{(-1)^m} \epsilon^{(-1)^r} (-\sigma dz)^{(-1)^{m+r}\chi(\hat{G})}.$$

Z drugiej strony, ponieważ dual $\hat{G}$ dowolnej skończenie generowanej grupy dyskretnej rangi większej lub równej 1 jest sumą prostą torusa tego samego wymiaru oraz grupy skończonej, tzn. $\hat{G}$ jest sumą skończenie wielu torusów, to $\chi(\hat{G}) = 0$, co kończy dowód. □

7.4 Endomorfizmy grup nilpotentnych i krystalograficznych

Twierdzenie 7.4.1. Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem skończenie generowanej beztorsyjnej grupy nilpotentnej G lub automorfizmem grupy krystalograficznej G z holonomią diagonalną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wtedy

$$RT_\phi^f(z) = RT_\phi^{ff}(z)$$

i obie funkcje są wymierne.

Dowód. Dowolna skończenie generowana beztorsyjna grupa nilpotentna jest superrozwiązalna a zatem policykliczna. Dowolna grupa krystalograficzna z holonomią diagonalną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ jest rozszerzeniem grupy policyklicznej o grupę skończoną. Dla endomorfizmów grup policyklicznych oraz automorfizmów grup będących rozszerzeniem grupy policyklicznej o grupę skończoną w [25, 27] zostało udowodnione TBFT (oraz TBFT$_f$ i TBFT$_{ff}$). Wynika z niego równość zeta funkcji Reidemeistera $R_\phi(z)$ oraz zeta funkcji $RT_\phi^f(z) = RT_\phi^{ff}(z)$). Wymierność zeta funkcji Reidemeistera dla endomorfizmów skończenie generowanych beztorsyjnych grup nilpotentnych została udowodniona w [19] zaś w [11] udowodniona została wymierność $R_\phi(z)$ dla automorfizmów grup krystalograficznych z holonomią diagonalną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

Rozdział 8

Redukcja do podgrup i grup ilorazowych

Niniejszy rozdział poświęcimy badaniu związku pomiędzy zeta funkcją Reidemeistera a dynamiczną zeta funkcją teorii reprezentacji endomorfizmu obciętego do podgrupy oraz endomorfizmu indukowanego na grupie ilorazowej.

8.1 Redukcja do podgrup

Lemat 8.1.1. [19, Lemat 33] Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem dowolnej grupy G, zaś H niech będzie jej podgrupą taką, że

(1) $\phi(H) \subset H$ oraz

(2) dla każdego $x \in G$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, dla ktorego $\phi^n(x) \in H$.

Wtedy

$$R(\phi) = R(\phi_H),$$

gdzie $\phi_H : H \to H$ jest obcięciem ϕ do H. Jeżeli wszystkie liczby $R(\phi^n)$ są skończone, to

$$R_\phi(z) = R_{\phi_H}(z).$$

Dowód. Niech $x \in G$, wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\phi^n(x) \in H$. Ponieważ x jest ϕ-sprzężone z $\phi^n(x)$ [20, Lemat 7], to klasa ϕ-sprzężoności $\{x\}_\phi$ elementu x ma niepusty przekrój z H.

Załóżmy, że $x, y \in H$ są ϕ-sprzężone, tj. istnieje element $g \in G$ taki, że

$$gx = y\phi(g). \tag{8.1}$$

Pokażemy teraz, że x i y są ϕ_H-sprzężone. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie wystarczająco duże, aby $\phi^n(g) \in H$. Wtedy, przykładając ϕ^n do równania (8.1), otrzymujemy że

$$\phi^n(g)\phi^n(x) = \phi^n(y)\phi^{n+1}(g)$$

a zatem $\phi^n(x)$ i $\phi^n(y)$ są ϕ_H-sprzężone. Z drugiej strony, na mocy lematu 7 w [20], x oraz $\phi^n(x)$ są ϕ_H-sprzężone a także y oraz $\phi^n(y)$ są ϕ_H-sprzężone, zatem również x oraz y są ϕ_H-sprzężone.

Pokazaliśmy więc, że przekrój H z klasą ϕ-sprzężoności w G jest klasą ϕ_H-sprzężoności w H. Istnieje zatem obustronnie odwracalne odwzorowanie

$$\begin{array}{rccc} Rest: & \mathcal{R}(\phi) & \to & \mathcal{R}(\phi_H) \\ & \{x\}_\phi & \mapsto & \{x\}_\phi \cap H, \end{array}$$

gdzie $\mathcal{R}$ oznacza zbiór klas ϕ-sprzężoności elementów z grupy G.

$$\{x\}_{\phi_H} \mapsto \{x\}_\phi.$$

W takim razie odwzorowanie $Rest$ jest bijekcją i $R(\phi) = R(\phi_H)$. $\square$

Niech teraz $Z(\phi)$ oznacza dowolną z liczb $RT(\phi), RT^f(\phi), RT^{ff}(\phi), AM^f(\phi)$, zaś $\mathcal{Z}(\phi)$ odpowiadający im zbiór $\mathcal{RT}(\phi), \mathcal{RT}^f(\phi), \mathcal{RT}^{ff}(\phi), \mathcal{AM}^f(\phi)$ klas równoważności nieprzywiedlnych reprezentacji.

Lemat 8.1.2. Niech G będzie rozszerzeniem grupy abelowej o grupę skończoną, zaś $\phi : G \to G$ będzie jej endomorfizmem. Załóżmy ponadto, że H jest podgrupą grupy G taką, że

(1) $\phi(H) \subset H$ oraz

(2) dla każdego $x \in G$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, dla którego $\phi^n(x) \in H$.

Wtedy

$$Z(\phi) = Z(\phi_H),$$

gdzie $\phi_H : H \to H$ jest obcięciem ϕ do H. Jeżeli wszystkie liczby $Z(\phi^n)$ są skończone, to

$$Z_\phi(z) = Z_{\phi_H}(z).$$

Dowód. Wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje grup będących rozszerzeniem grupy abelowej o grupę skończoną są skończenie wymiarowe. Niech

$$\rho : G \to U(V)$$

będzie reprezentacją nieprzywiedlną i załóżmy, że istnieje macierz $M \in U(V)$ taka, że

$$\rho \circ \phi = M \cdot \rho \cdot M^{-1},$$

tj. $\rho \in \mathcal{Z}(\phi)$. Załóżmy, że obcięcie ρ do H, ρ_H, jest reprezentacją przywiedlną , tzn. istnieje rozkład $V = V_1 \oplus V_2$ na H-moduły. W takim razie istnieje $g \in G$, dla którego $\rho(g)V_1 \notin V_1$. Ponieważ $\phi^n(g) \in H$ dla wystarczająco dużego $n \in \mathbb{N}$, to

$$\rho(H)M^n V_1 \notin M^n V_1.$$

Skoro jednak H jest ϕ-niezmiennicze oraz V_1 jest H-niezmiennicze, to

$$M^n V_1 = V_1.$$

Wobec tego

$$\rho(H)M^n V_1 \notin V_1.$$

co daje sprzeczność a zatem ρ musi być reprezentacją nieprzywiedlną podgrupy H na $M^n V$. Ponieważ $M^n V = V$, to reprezentacja ρ_H jest nieprzywiedlna. Oczywiście klasa reprezentacji ρ_H jest taka sama, jak klasa reprezentacji $\rho_H \circ \phi_H$, tj. $\rho_H \in \mathcal{Z}(\phi_H)$. Istnieje zatem odwzorowanie

$$Rest : \mathcal{Z}(\phi) \to \mathcal{Z}(\phi_H),$$

$$\rho \to \rho_H.$$

Dla reprezentacji $\rho_H \in \mathcal{Z}(\phi_H)$ istnieje macierz M taka, że

$$\rho \circ \phi_H = M \cdot \rho \cdot M^{-1}.$$

Jeśli M' jest dowolną, różną od M macierzą o tej własności, to $M' \cdot M^{-1}$ komutuje z $\rho_H(x)$ dla każdego $x \in H$. Wobec tego, dla $g \in \phi^{-n}(H)$ macierz

$$M^{-n} \cdot \rho(\phi^n(g)) \cdot M^n$$

nie zależy od wyboru M i zależy tylko od ρ, g oraz $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $\phi^n(g) = h_1 \in H$ oraz $\phi^m(g) = h_2 \in H$ dla $m > n$. Wtedy $\phi^{m-n}(h_1) = h_2$, z czego wynika, że

$$M^{m-n} \cdot \rho(h_1) \cdot M^{n-m} = \rho(h_2),$$

oraz

$$M^{-n} \cdot \rho(\phi^n(g)) \cdot M^n = M^{-m} \cdot \rho(\phi^m(g)) \cdot M^m.$$

Powyższe wyrażenie nie zależy od M ani n i zależy tylko od ρ oraz g. W takim razie, dla $g \in G$ możemy zdefiniować

$$\bar{\rho}(g) = M^{-n} \cdot \rho(\phi^n(g)) \cdot M^n,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest na tyle duże, aby $\phi^n(g) \in H$. Można łatwo sprawdzić, że $\bar{\rho}$ jest reprezentacją grupy G. Ponieważ ρ_H jest nieprzywiedlna, to $\bar{\rho}$ również. Natychmiast z tego wynika też, że klasa reprezentacji $\bar{\rho}$ jest taka sama, jak klasa reprezentacji $\bar{\rho} \circ \phi$, tj. $\rho \in \mathcal{Z}(\phi)$. Wobec tego

$$Rest(\bar{\rho}) = \rho$$

a ponieważ każde inne rozszerzenie $\tilde{\rho}$ reprezentacji ρ na G takie, że $\tilde{\rho} \in \mathcal{Z}(\phi)$ musi spełniać warunek

$$\tilde{\rho}(g) = M^{-n} \cdot \rho(\phi^n(g)) \cdot M^n,$$

to

$$\overline{Rest(\rho)} = \rho.$$

W takim razie $Rest$ jest bijekcją i $\mathcal{Z}(\phi) = \mathcal{Z}(\phi_H)$. □

Wniosek 8.1.3. Niech $H = \phi^n(G)$ i załóżmy, że wszystkie liczby $R(\phi^k)$ oraz $Z(\phi^k)$, $k \in N$, są skończone. Wtedy

$$R(\phi) = R(\phi_H) \text{ i } Z(\phi) = Z(\phi_H),$$

oraz

$$R_\phi(z) = R_{\phi_H}(z) \text{ i } Z_\phi(z) = Z_{\phi_H}(z).$$

Twierdzenie 8.1.4. Niech G będzie rozszerzeniem grupy abelowej o grupę skończoną, zaś $\phi : G \to G$ będzie jej endomorfizmem. Rozważmy podgrupę H grupy G, taką że $\phi(H) \subset H$ oraz dla każdego $x \in G$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\phi^n(x) \in H$. Załóżmy ponadto, że $R(\phi^k)$ oraz $Z(\phi^k)$ są skończone dla każdego $k \in N$. Jeżeli spełniony jest jeden z poniższych warunków:

(1) H jest skończenie generowaną grupą abelową,

(2) H jest grupą skończoną,

(3) H jest grupą krystalograficzną z holonomią diagonalną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

oraz ϕ_H jest automorfizmem, to

$$R_\phi(z) = R_{\phi_H}(z) = Z_{\phi_H}(z) = Z_\phi(z)$$

i są one funkcjami wymiernymi.

Dowód. Dla endomorfizmów $\phi : G \to G$ (oraz ich iteracji) skończenie generowanej grupy abelowej lub grupy skończonej, TBFT (oraz TBFT$_f$ i TBFT$_{ff}$) zostało udowodnione w [20]. Dowolna grupa krystalograficzna z holonomią diagonalną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ jest rozszerzeniem grupy policyklicznej o grupę skończoną i posiada tylko skończenie wymiarowe reprezentacje nieprzywiedlne. W [25, 27] TBFT (oraz TBFT$_f$ i TBFT$_{ff}$) zostało udowodnione dla automorfizmów grup policyklicznych rozszerzonych o grupę skończoną. Rezultaty te implikują równość zeta funkcji Reidemeistera $R_{\phi_H}(z)$ oraz zeta funkcji $Z_{\phi_H}(z)$. Stąd, na mocy lematu 8.1.1 i lematu 8.1.2 otrzymujemy, że

$$R_\phi(z) = R_{\phi_H}(z) = Z_{\phi_H}(z) = Z_\phi(z).$$

W [20] wymierność zeta funkcji Reidemeistera $R_\phi(z)$ została udowodniona dla endomorfizmów skończenie generowanych grup abelowych oraz dla grup skończonych. Z kolei w [11] wymierność $R_\phi(z)$ została wykazana dla automorfizmów grup będących rozszerzeniem grupy krystalograficzej o grupę skończoną z holonomią diagonalną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\square$

8.2 Redukcja do injektywnych endomorfizmów grupy ilorazowej

Niech $\phi : G \to G$ będzie endomorfizmem grupy G. Element $x \in G$ nazywamy *nilpotentnym*, jeśli istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\phi^n(x) = e$. Przez N oznaczmy zbiór wszystkich elementów nilpotentnych grupy G. Niech ponadto $Z(\phi)$ będzie jedną z liczb $RT^f(\phi), RT^{ff}(\phi)$, zaś $\mathcal{Z}(\phi)$ będzie odpowiednim ze zbiorów klas równoważności nieprzywiedlnych reprezentacji $\mathcal{RT}^f(\phi), \mathcal{RT}^{ff}(\phi)$.

Uwaga 8.2.1. W ogólności układ dynamiczny zdefiniowany przez odwzorowanie $\widehat{\phi}$ przestrzeni $\widehat{G}$ ($\widehat{G}_f$, $\widehat{G}_{ff}$ odpowiednio) nie musi istnieć. Istnieją jedynie dobrze określone $\widehat{\phi}^n$-**f**-punkty. Dobrze określony układ dynamiczny istnieje na $\widehat{G}^\phi$ ($\widehat{G}^\phi_f$, $\widehat{G}^\phi_{ff}$ odpowiednio). Jego punkty n-okresowe są równocześnie $\widehat{\phi}^n$-**f**-punktami.

Twierdzenie 8.2.2. Zbiór N wszystkich elementów nilpotentnych grupy G jest jej podgrupą normalną oraz $\phi(N) \subset N$ a także $\phi^{-1}(N) = N$. Stąd ϕ indukuje endomorfizm

$$[\phi/N] : G/N \to G/N$$

grupy ilorazowej G/N określony wzorem

$$[\phi/N](xN) = \phi(x)N.$$

Endomorfizm $[\phi/N]$ jest injektywny oraz

$$R(\phi) = R([\phi/N]), \quad Z(\phi) = Z([\phi/N]).$$

Niech $R(\phi^n)$ i $Z(\phi^n)$ będą skończone dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$R_\phi(z) = R_{[\phi/N]}(z), \quad Z_\phi(z) = Z_{[\phi/N]}(z).$$

Jeśli grupa ilorazowa G/N jest policykliczna, to dla liczb Reidemeistera zachodzą poniższe kongruencje Gaussa:

$$\sum_{d|n} \mu(d) \cdot R(\phi^{n/d}) \equiv 0 \mod n$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli ponadto spełniony jest jeden z następujących warunków

(1) grupa ilorazowa G/N jest skończenie generowaną grupą abelową,

(2) G/N jest grupą skończoną,

(3) G/N jest skończenie generowaną beztorsyjną grupą nilpotentną,

(4) G/N jest grupą krystalograficzną z holonomią diagonalną $\mathbb{Z}_2$, zaś $[\phi/N]$ jest jej automorfizmem,

to

$$R_\phi(z) = R_{[\phi/N]}(z) = Z_{[\phi/N]}(z) = Z_\phi(z)$$

i funkcje te są wymierne.

Dowód. Dowód przeprowadzimy w kilku krokach.

(i) Niech $x \in N, g \in G$, wtedy $\phi^n(x) = e$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\phi^n(gxg^{-1}) = \phi^n(gg^{-1}) = e$. Wobec tego $gxg^{-1} \in N$, więc N jest podgrupą normalną w G.

(ii) Weźmy $x \in N$ i wybierzmy $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\phi^n(x) = e$. Wtedy $\phi^{n-1}(\phi(x)) = e$, zatem $\phi(x) \in N$ oraz $\phi(N) \subset N$.

(iii) Jeśli $\phi(x) \in N$, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\phi^n(\phi(x)) = e$. Wobec tego $\phi^{n+1}(x) = e$ oraz $x \in N$ a zatem $\phi^{-1}(N) \subset N$. Inkluzja w drugą stronę wynika z (ii).

(iv) Przez $\mathcal{R}(\phi)$ oznaczmy zbiór klas ϕ-sprzężoności elementów z G. Pokażemy, że odwzorowanie

$$x \to xN$$

indukuje bijekcję

$$\mathcal{R}(\phi) \to \mathcal{R}([\phi/N]).$$

Załóżmy, że $x, y \in G$ są ϕ-sprzężone. Wtedy istnieje $g \in G$ takie, że $gx = y\phi(g)$. Rzutując na grupę ilorazową G/N otrzymujemy, że $gnxN = yN\phi(g)N$ a zatem $gNxN = yN[\phi/N](gN)$. Oznacza to, że xN i yN są $[\phi/N]$-sprzężone w G/N. Odwrotnie, załóżmy teraz, że xN i yN są $[\phi/N]$-sprzężone w G/N. Wtedy istnieje $gN \in G/N$ takie, że $gNxN = yN[\phi/N](gN)$, równoważnie $gx\phi(g)^{-1}y^{-1} = e$. Stąd $\phi^n(g)\phi^n(x) = \phi^n(y)\phi^n(\phi(g))$. Pokazaliśmy więc, że $\phi^n(x)$ oraz $\phi^n(y)$ są ϕ-sprzężone. Z drugiej strony x oraz $\phi^n(x)$ są ϕ-sprzężone, podobnie jak y i $\phi^n(y)$. Wobec tego x i y są ϕ-sprzężone.

(v) Pokazaliśmy, że x i y są ϕ-sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy xN i yN są $[\phi/N]$-sprzężone. Z tego wynika, że $x \to xN$ indukuje bijekcję z $\mathcal{R}(\phi)$ do $\mathcal{R}([\phi/N])$. Zatem $R(\phi) = R([\phi/N])$.

(vi) Pokażemy teraz, że $Z(\phi) = Z([\phi/N])$. Niech $\rho \in \mathcal{Z}(\phi)$ i niech M będzie przekształceniem, dla którego

$$\rho \circ \phi = M \cdot \rho \cdot M^{-1}.$$

Jeśli $x \in N$, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\phi^n(x) = e$. Stąd N jest zawarta w jądrze ρ i istnieje reprezentacja $[\rho/N]$ grupy G/N zadana wzorem

$$[\rho/N](gN) = \rho(g).$$

Ponieważ $[\rho/N]$ spełnia równanie

$$[\rho/N] \circ [\phi/N] = M \cdot [\rho/N] \cdot M^{-1},$$

to $[\rho/N] \in \mathcal{Z}([\phi/N])$.

(vii) Odwrotnie, jeśli $\rho \in \mathcal{Z}([\phi/N])$, to możemy zdefiniować $\bar{\rho} \in \mathcal{Z}(\phi)$ następująco

$$\bar{\rho}(x) = \rho(xN).$$

Oczywiście $\overline{[\rho/N]} = \rho$ oraz $\bar{\rho}/N = \rho$. W [25, 27] udowodnione zostało TBFT (a także $TBFT_f$ i $TBFT_{ff}$) dla endomorfizmów grup policyklicznych i dla automorfizmów grup będących rozszerzeniem grupy policyklicznej o grupę skończoną. Wówczas z (v) i (vi) wynika, że

$$R(\phi^n) = R([\phi/N]^n) = Z([\phi/N]^n) = Z(\phi^n).$$

Kongruencje Gaussa wynikają teraz z uwagi 8.2.1 i ogólnej teorii kongruencji punktów okresowych [54, 59]. Mianowicie, niech P_d będzie liczbą punktów okresowych o najmniejszym okresie d układu dynamicznego z wniosku 8.2.1. Wtedy

$$R(\phi^n) = Z(\phi^n) = \sum_{d|n} P_d.$$

Liczba P_n jest równa iloczynowi liczby n oraz ilości orbit mocy n, zatem P_n jest zawsze podzielna przez n. Wobec tego na mocy twierdzenia Möbiusa o odwracaniu

$$\sum_{d|n} \mu(d) R(\varphi^{n/d}) = P_n \equiv 0 \mod n.$$

Skręcone twierdzenie Burnside'a-Frobeniusa (oraz TBFT$_f$ i TBFT$_{ff}$) implikuje również równość funkcji zeta Reidemeistera $R_\phi(z)$ i zeta funkcji $RT_\phi^f(z) = RT_\phi^{ff}(z)$. W [19] wymierność zeta funkcji Reidemeistera $R_\phi(z)$ została udowodniona dla endomorfizmów nieskończenie generowanych grup abelowych oraz dla endomorfizmów nieskończenie generowanych beztorsyjnych grup nilpotentnych. Z kolei w [11] udowodniono wymierność $R_\phi(z)$ dla automorfizmów grup krystalograficznych o holonomii diagonalnej $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

□

Bibliografia

[1] D. V. Anosov. The Nielsen numbers of maps of nil-manifolds. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 40:133–134, 1985.

[2] R. Baer. Abelian groups without elements of finite order. *Duke Mathematical Journal*, 3:68–122, 3 1937.

[3] V. Baladi. Dynamical zeta functions and dynamical determinants for hyperbolic maps. *Real and Complex Dynamical Systems*, 464:1–26, 1995.

[4] B. Bekka, P. de La Harpe, and A. Valette. *Kazhdan's property (T)*, volume 11. Cambridge University Press, 2008.

[5] J. Bell, R. Miles, and T. Ward. Towards a Pólya–Carlson dichotomy for algebraic dynamics. *Indagationes Mathematicae*, 25:652–668, 2014.

[6] W. Bondarewicz, A. Fel'shtyn, and M. Ziętek. Towards a dichotomy for the Reidemeister zeta function. *e-print, arXiv:2202.09776v1*, 2022.

[7] R. Bowen and O. Lanford. Zeta functions of restrictions of the shift transformation. *Proc.Global Anal.*, pages 43–49, 1968.

[8] F. Carlson. Über ganzwertige Funktionen. *Mathematische Zeitschrift*, 11:1–23, 1921.

[9] K. Dekimpe. *Almost-Bieberbach groups: affine and polynomial structures*, volume 1639. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[10] K. Dekimpe and G.-J. Dugardein. Nielsen zeta functions for maps on infranilmanifolds are rational. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 17:355–370, 2015.

[11] K. Dekimpe, S. Tertooy, and I. V. den Bussche. Reidemeister zeta functions of low-dimensional almost-crystallographic groups are rational. *Communications in Algebra*, 46:4090–4103, 2018.

[12] P. Deligne. La conjecture de Weil. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 43:273–307, 1974.

[13] D. Eisenbud. *Commutative algebra, volume 150 of Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[14] G. Everest, V. Stangoe, and T. Ward. Orbit counting with an isometric direction. *Algebraic and topological dynamics, AMS, 293-302 (2005)*, 385:293–302, 7 2005.

[15] A. Fel'shtyn. New zeta function in dynamic. *Tenth Internat. Conf. on Nonlinear Oscillations, Varna, Abstracts of Papers, Bulgar. Acad. Sci*, 208, 1984.

[16] A. Fel'shtyn. A new zeta function in Nielsen's theory and a universal product formula for dynamical zeta functions. *Functional Analysis and Its Applications*, 21:168–170, 1987.

[17] A. Fel'shtyn. New zeta functions for dynamical systems and Nielsen fixed point theory. *Topology and Geometry-Rohlin Seminar in: Lecture Notes in Math.*, 1346, Springer:33–55, 1 1988.

[18] A. Fel'shtyn. The Reidemeister zeta function and the computation of the Nielsen zeta function. *Colloquium Mathematicum*, 62:153–166, 1991.

[19] A. Fel'shtyn. *Dynamical zeta functions, Nielsen theory and Reidemeister torsion*, volume 699. Mem. Amer. Math. Soc., 147 edition, 2000.

[20] A. Fel'shtyn and R. Hill. The Reidemeister zeta function with applications to Nielsen theory and a connection with Reidemeister torsion. *K-theory*, 8:367–393, 1994.

[21] A. Fel'shtyn and R. Hill. Trace formulae, zeta functions, congruences and Reidemeister torsion in Nielsen theory. *Forum Math.*, 10:641–663, 1998.

[22] A. Fel'shtyn, R. Hill, and P. Wong. Reidemeister numbers of equivariant maps. *Topology and its Applications*, 67:119–131, 1995.

[23] A. Fel'shtyn and B. Klopsch. Pólya–Carlson dichotomy for coincidence Reidemeister zeta functions via profinite completions. *Indagationes Mathematicae*, 33:753–767, 2022.

[24] A. Fel'shtyn and J. B. Lee. The Nielsen and Reidemeister numbers of maps on infra-solvmanifolds of type (R). *Topology and its Applications*, 181:62–103, 2015.

[25] A. Fel'shtyn and E. Troitsky. Twisted Burnside-Frobenius theory for discrete groups. *J. Reine. Angew. Math.*, 613:193–210, 2007.

[26] A. Fel'shtyn and E. Troitsky. Geometry of Reidemeister classes and twisted Burnside theorem. *Journal of K-theory*, 2:463–506, 2008.

[27] A. Fel'shtyn and E. Troitsky. Twisted Burnside–Frobenius theory for endomorphisms of polycyclic groups. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 25:17–26, 2018.

[28] A. Fel'shtyn, E. Troitsky, and A. Vershik. Twisted Burnside theorem for type ii1 groups: An example. *Mathematical Research Letters*, 13:719–728, 7 2006.

[29] A. Fel'shtyn, E. Troitsky, and M. Ziętek. New zeta functions of Reidemeister type and the Twisted Burnside–Frobenius theory. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 27:199–211, 2020.

[30] A. Fel'shtyn and M. Ziętek. Dynamical zeta functions of Reidemeister type. *Topological Methods of Nonlinear Analysis*, 56:433–455, 2020.

[31] A. Fel'shtyn and M. Ziętek. Dynamical zeta functions of Reidemeister type and representations spaces. *Contem. Math.*, 744:57–81, 2020.

[32] A. L. Fel'shtyn. Zeta functions in Nielsen theory. Functsional Anal. i Prilozhen 22 (1)(1988), 87-88. *English transl.: Functional Anal. Appl*, 22:76–77, 1988.

[33] D. Fried. The zeta functions of Ruelle and Selberg. *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, 19:491–517, 1986.

[34] D. Gonçalves and P. Wong. Homogeneous spaces in coincidence theory. *Forum Math.*, 17:297–313, 2005.

[35] B. Jiang. *Lectures on Nielsen fixed point theory*, volume 14. Contemporary Mathematics, 1983.

[36] L. Li. On the rationality of the Nielsen zeta function. *Adv. in Math.(China)*, 23:251–256, 1994.

[37] D. Lind, K. Schmidt, and T. Ward. Mahler measure and entropy for commuting automorphisms of compact groups. *Inventiones mathematicæ*, 101:593–629, 1990.

[38] D. A. Lind and T. Ward. Automorphisms of solenoids and p-adic entropy. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 8:411–419, 1988.

[39] A. Mal'cev. On a class of homogeneous spaces. *Izv. Akad. Nauk. Armyan. SSSR Ser. Mat*, 13:201–212, 1949.

[40] A. Manning. Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions. *Bulletin of the London mathematical society*, 3:215–220, 1971.

[41] H. Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8. Cambridge University Press, 1989.

[42] R. Miles. Zeta functions for elements of entropy rank-one actions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 27:567–582, 2007.

[43] R. Miles. Periodic points of endomorphisms on solenoids and related groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 40:696–704, 2008.

[44] R. Miles. Synchronization points and associated dynamical invariants. *Transactions of the American Mathematical Society*, 365:5503–5524, 2013.

[45] J. Milnor and W. Thurston. On iterated maps of the interval. *Lec. Not. in Math.*, 1342:465–563, 2006.

[46] G. Myerson and A. J. V. D. Poorten. Some problems concerning recurrence sequences. *The American mathematical monthly*, 102:698–705, 1995.

[47] D. Osin. Small cancellations over relatively hyperbolic groups and embedding theorems. *Annals of mathematics*, 172:1–39, 2010.

[48] V. B. Pilyugina and A. L. Fel'shtyn. The Nielsen zeta function. *Functional Analysis and Its Applications*, 19:300–305, 1985.

[49] G. Pólya. Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe. *Mathematische annalen*, 99:687–706, 1928.

[50] D. Ruelle. Zeta-functions for expanding maps and Anosov flows. *Inventiones mathematicae*, 34:231–242, 1976.

[51] K. Schmidt. *Dynamical Systems of Algebraic Origin*, volume 128. Springer, 1995.

[52] S. L. Segal. *Nine Introductions in Complex Analysis-Revised Edition*, volume 208. Elsevier, 2007.

[53] J.-P. Serre. *Trees*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[54] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73:747–817, 1967.

[55] E. V. Troitsky. Two examples related to the twisted Burnside–Frobenius theory for infinitely generated groups. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, 21:219–227, 2016.

[56] A. Weil. *Basic number theory.*, volume 144. Springer-Verlag New York, 1967.

[57] P. Wong. Reidemeister zeta function for group extensions. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 38:1107–1116, 2001.

[58] T. Yoshida. The Burnside ring and the universal zeta function of finite. *RIMS Kokyuroku*, 1872:122–131, 2014.

[59] A. V. Zarelua. On congruences for the traces of powers of some matrices. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 263:78–98, 2008.