17.08.

Poznań, 9 sierpnia 2023

Grzegorz Banaszak
Profesor
Wydział Matematyki i Informatyki
UAM Poznań

Recenzja rozprawy doktorskiej magister Malwiny Bondarewicz

Mgr Malwina Bondarewicz napisała pracę doktorską pt. *Dynamiczne zeta funkcje typu Reidemeistera* pod kierunkiem prof. dr hab. Aleksandra Felsztyna. W swojej rozprawie zajmuje się kilkoma klasami zeta funkcji dynamicznych, będących uogólnieniami zeta funkcji Artina-Mazura ciągłego odwzorowania. Pierwowzorem dla funkcji Artina-Mazura była z kolei funkcja zeta Weila rzutowej, gładkiej rozmaitości nad ciałem skończonym. Funkcje zeta Weila i dynamiczne zeta funkcje mają zwykle następującą postać:

$$\zeta_\delta(z) := \exp(\sum_{n=1}^{\infty} R(\delta^n)\frac{z^n}{n}),$$

gdzie δ jest pewnym procesem dynamicznym a δ^n jego n-tą kompozycją. Na przykład $\delta := F : X(\overline{\mathbb{F}_q}) \to X(\overline{\mathbb{F}_q})$ jest automorfizmem Frobeniusa F gładkiej, rzutowej rozmaitości algebraicznej nad ciałem skończonym $\mathbb{F}_q$ lub $\delta : G \to G$ jest homomorfizmem group lub $\delta : X \to X$ jest przekształceniem ciągłym itd.

Liczby $R(\delta^n)$ są ważnymi elementami związanymi z danym procesem dynamicznym δ. W przypadku $\delta = F$ określamy $R(F^n) := N_n(X) = X(F_{q^n})$, gdzie $N_n(X)$ jest liczbą punktów stałych w działaniu n-tej potęgi automorfizmu Frobeniusa F^n na $X(\overline{\mathbb{F}_q})$.

Praca doktorska Malwiny Bondarewicz dotyczy ciekawych przypadków powyżej opisanej zeta funkcji. Są to dynamiczne zeta funkcje typu Reidemeistera. Opiszę kilka wybranych procesów dynamicznych rozpatrywanych w pracy doktorskiej Malwiny Bondarewicz i omówię pokrótce, jakie własności mają związane z nimi dynamiczne zeta funkcje.

(a) W rozdziale 2, dla grupy G z endomorfizmem $\phi : G \to G$, określone są klasy sprzężoności elementów w G następująco: α i α' są ϕ-sprzężone, gdy istnieje $\gamma \in G$ taki, że $\alpha' = \gamma\alpha\phi(\gamma)^{-1}$. Liczbę $R(\phi)$ klas ϕ-sprzężoności nazywamy liczbą Reidemeistera endomorfizmu ϕ. Fundamentalne twierdzenie tego rozdziału (Tw. 2.3.10) dotyczy przypadku, gdy G jest podgrupą grupy

$\mathbb{Q}^d$. M. Bondarewicz, przy dodatkowych założeniach, wylicza w jawny sposób liczby $R(\phi^n)$ za pomocą iloczynu waluacji pewnych jawnie opisanych liczb algebraicznych. Przy dodatkowym, naturalnym założeniu na $R(\phi^n)$, pokazuje, że odpowiadająca zeta funkcja jest albo wymierna albo jej brzegiem naturalnym jest okrąg jednostkowy. Dowód tego twierdzenia jest zaawansowany technicznie jak i dowody pomocniczych rezultatów.

(b) Podobne wyniki (Tw. 3.0.4), jak w powyższym przypadku (a), M. Bondarewicz uzyskuje w rozdziale 3 dla grupy $G = \mathbb{Z}_p$ i oswojonych endomorfizmów $\phi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$.

(c) Podobne wyniki jak w przypadku (a) M. Bondarwicz uzyskuje także w rozdziale 4 w przypadku przekształcenia ciągłego $f : X \to X$ i ustalonego podniesienia $\tilde{f}$ do nakrycia universalnego. Jeżeli Γ jest grupą przekształceń nakrywających nakrycia uniwersalnego to $\Gamma \cong \pi_1(X, x_0)$, gdzie x_0 jest ustalonym punktem bazowym. Określa się naturalne przekształcenie $\tilde{f}_* : \Gamma \to \Gamma$ i pokazuje, że $R(f) = R(\tilde{f}_*)$, gdzie $R(\tilde{f}_*)$ oznacza liczbę klas $\tilde{f}_*$-sprzężoności w Γ. Wtedy główne twierdzenie rozdziału 4 (Tw. 4.0.5), w przypadku gdy $\Gamma \subset \mathbb{Q}^d$ i $\tilde{f}_*$ jest automorfizmem, jest dokładnym analogiem Tw. 2.3.10 rozdziału 2.

(d) W rozdziale 5 system dynamiczny, który definiuje odpowiednią zeta funkcję Reidemeistera jest uogólnieniem systemu dynamicznego omówionego w rozdziale 2 i jest określony następująco. Rozpatrzmy dwa endomorfizmy: $\phi, \psi : G \to G$. Elementy $\alpha, \alpha' \in G$ nazywane są ϕ, ψ sprzężonymi, gdy istnieje $\gamma \in G$ taki, że $\alpha' = \psi(\gamma)\alpha\phi(\gamma)^{-1}$. Liczbę $R(\phi, \psi)$ klas ϕ, ψ sprzężoności, dla tego systemu dynamicznego, nazywamy liczbą Reidemeistera koincydencji endomorfizmów ϕ i ψ. Fundamentalne twierdzenie tego rozdziału jest naturalnym uogólnieniem Tw. 2.3.10 w przypadku, gdy G jest podgrupą grupy $\mathbb{Q}^d$, z analogicznymi założeniami. Wyliczane są w jawny sposób liczby $R(\phi^n, \psi^n)$, definiujące zeta funkcję, za pomocą iloczynu waluacji pewnych jawnie opisanych liczb algebraicznych. Przy dodatkowym, naturalnym założeniu na $R(\phi^n, \psi^n)$ pokazano, że odpowiadająca zeta funkcja jest albo wymierna albo jej brzegiem naturalnym jest okrąg zbieżności. Dowód tego twierdzenia jest również zaawansowany technicznie.

(e) Rozdział 6 jest naturalną kontynuacją rozdziału 5. Badane są liczby Reidemeistera koincydencji endomorfizmów $\phi, \psi : G \to G$ i odpowiadająca im zeta funkcja dla beztorsyjnej skończenie generowanej grupy nilpotentnej G. Głównymi wynikami rozdziału 6 są twierdzenia 6.0.4 i 6.0.5. Obliczenia liczb Reidemeistera koincydencji endomorfizmów sprowadza sie do iloczynu poszczególnych liczb koincydencji ograniczeń ϕ i ψ na ilorazy filtracji z odpowiedniego, dolnego centralnego ciągu w G. Twierdzenie 6.0.5 pokazuje jawne wyliczenie liczb $R(\phi^n, \psi^n)$ oraz wymierność odpowiadającej tym liczbom zeta funkcji.

(f) Rozdział 7 opisuje dynamiczne zeta funkcje dla reprezentacji unitarnych grupy G. Jeżeli $\phi : G \longrightarrow G$ jest homomorfizmem, to rozpatrujemy reprezentacje unitarne ρ takie, że ρ i $\rho \circ \phi$ są izomorficzne. Rozpatrujemy przestrzenie klas równoważności reprezentacji unitarnych dowolnych, skończenie wymiarowych i skończonych. W każdym z tych trzech przypadków definiujemy odpowiednie liczby Reidemeistera iteracji ϕ i odpowiadające zeta funkcje. Te zeta funkcje są algebriczne gdy ϕ jest okresowe (Tw. 7.0.2). Ponadto pokazano, że jeśli przestrzenie ϕ-nieprzywiedlnych reprezentacji są skończone, to odpowiednie zeta funkcje dynamiczne są dobrze określone i spełniają równanie funkcyjne (Tw. 7.0.4).

(g) W rozdziale 8 rozpatrywane sa dwa przypadki dynamicznych zeta funkcji dla homomorfizmu $\phi : G \longrightarrow G$. Pierwszy przypadek dotyczy grupy G, która jest rozszerzeniem grupy abelowej H o grupę skończoną. Wtedy, przy szeregu dodatkowych założeń pokazano, że dla endomorfizmu ϕ zachowującego H, zeta funkcja Reidemeistera układu dynamicznego ϕ jest równa zeta funkcji Reidemeistera układu dynamicznego ϕ_H, obcięcia ϕ do H, i te zeta funkcje są wymierne (Tw. 8.1.4). Drugi przypadek dotyczy zeta funkcji układu dynamicznego ϕ i zeta funkcji układu dynamicznego, $\phi/N : G/N \longrightarrow G/N$, który jest redukcją ϕ na grupę ilorazową G/N, gdzie $N \triangleleft G$ oznacza podgrupę elementów ϕ-nilpotentnych w G. W tym przypadku, znów przy szeregu odpowiednich założeń pokazano, że zeta funkcja Reidemeistera ϕ jest równa zeta funkcji Reidemeistera ϕ/N i te zeta funkcje są wymierne (Tw. 8.2.2).

Wyniki zawarte w rozprawie doktorskiej mgr Malwiny Bondarewicz są bardzo wartościowe. Ich dowody są technicznie zaawansowane i wymagają od autorki dużych umiejętności z topologii, geometrii algebraicznej, teorii reprezentacji, teorii grup i algebraicznej teorii liczb. Te umiejętności zdobyła we współpracy z promotorem prof. dr hab. Aleksandrem Felsztynem. Praca zawiera kilka misprintów np. w liniach 4+ i 6+ na stronie 20, ale te misprinty nie mają wpływu na wyniki rozprawy doktorskiej.

Warto dodać, że mgr Malwina Bondarewicz jest współautorem 3 publikacji i jednego preprintu. Na temat wyników tych prac wygłaszała wykłady na konferencjach krajowych i zagranicznych. Podsumowując, rozprawa doktorska mgr Malwiny Bondarewicz spełnia wszystkie warunki określone w art.187 ust. 1-3 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce. Wnoszę o dopuszczenie rezprawy doktorskiej mgr Malwiny Bondarewicz do dalszych etapów postępowania w kierunku przyznania stopnia doktora nauk matematycznych.

Grzegorz Banaszak