

Gdańsk, 29 lipca 2023

Prof. dr hab. Grzegorz Graff  
Politechnika Gdańska  
Wydział Fizyki Technicznej  
i Matematyki Stosowanej  
80-233 Gdańsk  
ul. Narutowicza 11/12

**Recenzja rozprawy doktorskiej  
magister Malwiny Bondarewicz  
p.t. "Dynamiczne zeta funkcje typu Reidemeistera"**

Zeta funkcje stanowią ważny obiekt matematyczny od wielu lat studiowany na gruncie teorii liczb, układów dynamicznych i topologii. Z jednej strony stanowią one użyteczne narzędzie, a z drugiej same w sobie także są przedmiotem badań. Tematem studiów autorki w niniejszej rozprawie są, mające swe korzenie w teorii Nielsena, zeta funkcje typu Reidemeistera. Stawiane spektrum pytań dotyczy głównie kwestii ich wymierności, algebraiczności, a także spełniania przez nie określonych równań funkcyjnych.

Recenzowana praca doktorska liczy 76 stron, na które składają się osiem rozdziałów i bibliografia. Dodatkowo rozprawa zawiera streszczenie w języku polskim i angielskim oraz podziękowania dla promotora.

Wyniki przedstawione w rozprawie zostały opublikowane w cyklu trzech publikacji w renomowanych czasopismach matematycznych i w jednym pre-princie. Prace mają charakter zespołowy: napisane zostały przez dwóch lub trzech autorów, każda z udziałem promotora i doktorantki:

A. Fel'shtyn, E. Troitsky, and M. Ziętek, *New zeta functions of Reidemeister type and the Twisted Burnside–Frobenius theory*, Russian Journal of Mathematical Physics, 27:199–211, 2020.

A. Fel'shtyn and M. Ziętek. *Dynamical zeta functions of Reidemeister type*, Topological Methods of Nonlinear Analysis, 56:433–455, 2020.

A. Fel'shtyn and M. Ziętek. *Dynamical zeta functions of Reidemeister type and representations spaces*, Contem. Math., 744:57–81, 2020.

W. Bondarewicz, A. Fel'shtyn, and M. Ziętek, *Towards a dichotomy for the Reidemeister zeta function*, e-print, arXiv:2202.09776v1, 2022.

W teorii układów dynamicznych i teorii punktów stałych ważne miejsce

zajmują tzw. dynamiczne zeta funkcje. Jedną z nich jest zeta funkcja Artina-Mazura:

$$F_f(z) = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Fix}(f^n)}{n} z^n \right),$$

gdzie  $\text{Fix}(f^n)$  oznacza liczbę izolowanych punktów stałych  $n$ -tej iteracji  $f$ .

Zastępując w powyższej formule liczby  $\text{Fix}(f^n)$  różnymi ciągami (liczb będących topologicznymi niezmiennikami dla iteracji odwzorowania) odpowiadającymi za dynamiczne własności funkcji  $f$ , otrzymuje się różne dynamiczne zeta funkcje, np zeta funkcję Lefschetza, lub zeta funkcję Nielsena lub zeta funkcję Reidemeistera. W tym ostatnim przypadku rozpatrywany jest ciąg  $R(f^n)$  liczb Reidemeistera kolejnych iteracji.

Możliwe jest także bardziej ogólne podejście, w której abstrahuje się od kontekstu topologicznego i zamiast odwzorowania badane są endomorfizmy pewnej grupy, a liczba Reidemeistera zdefiniowana jest jako relacja zliczająca klasy sprzężoności relacji Reidemeistera. Ten kierunek badań jest właśnie głównym przedmiotem recenzowanej rozprawy. W pracy rozważane są (przy odpowiednich, naturalnych założeniach) różne klasy funkcji zeta pochodzące od klasycznej liczby Reidemeistera, liczby Reidemeistera koincydencji oraz liczby Reidemeistera teorii reprezentacji.

Wyniki uzyskane przez doktorantkę obejmują głównie podanie wzorów na liczby Reidemeistera dla automorfizmów rozważanych grup oraz wykazanie wymierności funkcji zeta (lub faktu, że jest ona skończonym iloczynem pierwiastków z funkcji wymiernej) oraz udowodnienie tzw. dychotomii Pólyi-Carlsona. Dychotomia ta zawiera następującą alternatywę: albo odpowiednia zeta funkcja jest wymierna albo okrąg jednostkowy jest jej brzegiem naturalnym. Innym typem uzyskanych wyników jest wspomniane wcześniej stwierdzenie spełniania pewnego równania funkcyjnego przez odpowiednią funkcję zeta. Jednym z kolejnych interesujących rezultatów uzyskanych w rozprawie, a mających głębokie związki z teorią punktów periodycznych, są kongruencje Gaussa dla liczb Reidemeistera:

$$\sum_{d|n} \mu(d) R(\phi^{n/d}) \equiv 0 \pmod{n},$$

gdzie  $\mu$  oznacza arytmetyczną funkcję Möbiusa. Kongruencje te udowodnił dla ciągu indeksów punktu stałego iteracji odwzorowania A. Dold (dlatego nazywane są one też kongruencjami lub relacjami Dolda). Dzięki wcześniejszym pracom promotora i jego współpracowników znane były one też w przypadku liczb Nielsena iteracji i dynamicznych liczb Reidemeistera dla

odwzorowań niektórych przestrzeni w siebie. Autorka prezentuje ich przeniesienie na liczby Reidemeistera teorii reprezentacji i liczby Reidemeistera automorfizmów pewnych grup.

Tematyka recenzowanej rozprawy doktorskiej jest w mojej opinii interesująca i wpisuje się w prowadzone obecnie, w różnych czołowych ośrodkach krajowych i zagranicznych, badania na pograniczu algebry i teorii układów dynamicznych. Techniki badawcze używane w rozprawie są zróżnicowane, dominuje głównie klasyczny aparat algebraiczny. Oprócz standardowych metod wymienić można między innymi: klasyczne twierdzenie Bauera z lat 30-tych XX wieku, dual Pontriagina i jego własności, wyniki Bella, Milesa i Warda dotyczące brzegów naturalnych, twierdzenie Pólyi - Carlsona, czy też własności ciągów liniowo rekurencyjnych.

Układ rozprawy jest według mnie prawidłowy: na początku autorka przedstawia wprowadzenie do uprawianej przez nią tematyki, omawiając klasyczne funkcje zeta i związki między nimi, następnie w skondensowanej formie przedstawia główne rezultaty rozprawy, a kolejne rozdziały poświęcone są poszczególnym wynikom i ich dowodom. Podkreślić należy, że praca jest również napisana z dużą starannością i dbałością o stronę redakcyjną.

Drobna uwaga krytyczna: w kilku miejscach następują odwołania do literatury bez bardziej szczegółowego omówienia wyniku, z którego się korzysta. Wydaje mi się, że w doktoracie, z zasady powinno się raczej rozwijać rozumowania zawarte w opublikowanych wcześniej artykułach. Natomiast chciałbym pochwalić doktorantkę za zawarcie w rozprawie dobrze dobranych przykładów ilustrujących omawianą teorię.

Pozytywnie oceniam również dobór piśmiennictwa, które obejmuje zarówno klasyczne pozycje monograficzne, jak i najnowsze artykuły naukowe. Autorka wykazuje się znaczną biegłością w wykorzystywaniu różnych złożonych faktów matematycznych, demonstrując wysoki poziom wiedzy i dojrzałość naukową, co dobrze wróży jeśli chodzi o dalszą, już samodzielną, pracę i rozwój jej kariery naukowej.

Podsumowując, bardzo pozytywnie oceniam przedstawioną rozprawę doktorską. Stanowi ona oryginalne rozwiązanie interesującego problemu naukowego, jakim jest charakteryzacja różnych typów zeta funkcji i spełnia ona w mojej opinii wszystkie wymagania określone w art. 187 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo i szkolnictwie wyższym i nauce. Wnoszę o dopuszczenie pracy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Grzegorz Graff  
(podpisane elektronicznie)