

04. 01. 2024

W P Ł Y N Ę Ł O



RPW/210/2024 P  
Data: 2024-01-04

Prof. dr hab. inż. Zbigniew Emirsajłow  
Katedra Automatyki i Robotyki  
Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie  
Gen. Sikorskiego 37, 70-313 Szczecin  
e-mail zbigniew.emirsajlow@zut.edu.pl

Szczecin, 30 grudnia 2023 roku.

## RECENZJA

rozprawy doktorskiej Pana mgr. Bartosza Wasilewskiego pt.

**Asymptotics analysis and analytic tools for certain types of  $C_0$ -semigroups**

Promotor: Prof. dr hab. Grigorij Sklyar

Promotor pomocniczy: Dr Piotr Polak

### 1 Wstęp

#### 1.1 Podstawa opracowania recenzji

Niniejszą recenzję opracowano na podstawie uchwały Nr 95/2023 Rady Naukowej Instytutu Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego z dnia 10 października 2023 roku w sprawie wyznaczenia recenzenta w postępowaniu o nadanie stopnia naukowego doktora nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka mgr. Bartoszowi Wasilewskiemu (pismo Przewodniczącego Rady Naukowej z dnia 10 października 2023 roku).

#### 1.2 Kandydat do stopnia doktora

Autorem rozprawy doktorskiej, przedstawionej do recenzji jest mgr Bartosz Wasilewski. Kandydat ukończył studia I i II stopnia na kierunku matematyka na Wydziale Fizyki i Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego w latach 2011-2015. Od 2019 roku jest studentem Szkoły Doktorskiej Uniwersytetu Szczecińskiego. Wcześniej, w latach 2007-2010 studiował na kierunku fizyka, matematyka i astronomia na Uniwersytecie Glasgow w Wielkiej Brytanii, a także, w latach 2015-2019 odbywał studia doktoranckie z fizyki w Instytucie Fizyki Molekularnej Polskiej Akademii nauk w Poznaniu.

Mgr Wasilewski jest współautorem pięciu artykułów w czasopismach z obszaru fizyki, jednego artykułu, który ukaze się w czasopiśmie *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry* oraz jednego referatu w materiałach konferencyjnych. W dorobku ma również osiem wystąpień na międzynarodowych i krajowych konferencjach z fizyki i matematyki.

#### 1.3 Informacja o ocenianej rozprawie doktorskiej

Rozprawa nosi tytuł *Asymptotics analysis and analytic tools for certain types of  $C_0$ -semigroups* i jest napisana w języku angielskim. Tytuł można przetłumaczyć na język polski jako *Analiza własności asymptotycznych i narzędzia analityczne dla pewnych typów silnie ciągłych półgrup*.

Promotorem rozprawy jest prof. dr hab. Grigorij Sklyar z Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie, a promotorem pomocniczym - dr Piotr Polak z Uniwersytetu Szczecińskiego.

## 2 Omówienie i ocena wyników rozprawy

### 2.1 Wprowadzenie i ocena tematyki rozprawy

Matematyczny opis ewolucji w czasie różnorodnych zjawisk i procesów występujących w przyrodzie, gospodarce, społeczeństwie oraz systemów spotykanych w technice bardzo często można sprowadzić do abstrakcyjnego, jednorodnego zagadnienia początkowego Cauchy'ego

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}\tag{1}$$

gdzie  $A$  jest liniowym, nieograniczonym operatorem na nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha  $X$ , generującym silnie ciągłą półgrupę liniowych, ograniczonych operatorów

$$(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X).\tag{2}$$

Półgrupa ta pozwala przedstawić rozwiązanie  $(x(t))_{t \geq 0}$  równania różniczkowego (1) w postaci

$$x(t) = T(t)x_0, \quad t \geq 0,\tag{3}$$

Uniwersalność opisu (1)-(3) polega na tym, że obejmuje on m.in. liniowe równania różniczkowe cząstkowe oraz równania różniczkowe zwyczajne z opóźnieniami. Badanie właściwości półgrupy  $(T(t))_{t \geq 0}$  w zależności od właściwości jej generatora  $A$  jest od dziesiątek lat przedmiotem intensywnych badań w obrębie analizy funkcjonalnej, teorii operatorów, teorii równań różniczkowych (np. prace E. Hille, R. Phillipsa, K. Yosida'y, N. Dunforda, J. Schwartza)). Jednym z istotnych problemów, interesujących badaczy, są właściwości asymptotyczne półgrupy, czyli jej zachowanie się przy  $t \rightarrow \infty$ , i związane z tym zachowaniem, centralne pojęcie stabilności.

W swojej rozprawie doktorskiej Kandydat podjął badania w dwóch obszarach:

1. W obszarze **analizy asymptotycznych właściwości silnie ciągłej półgrupy**  $(T(t)) \subset \mathcal{L}(X)$ , z generatorem  $A$ , poprzez pokazanie, że przy pewnych założeniach, dotyczących m.in. widma  $\sigma(A)$  operatora  $A$ , zachodzi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|T(t)(A - \mu I)^{-1}\|}{f(t)} = 0,\tag{4}$$

gdzie  $\mu \in \rho(A)$ ,  $\rho(A)$  jest zbiorem rezolwentowym operatora  $A$ , a  $f(t)$  jest funkcją, w pewnym sensie, podobną lub równą  $\|T(t)\|$ . Dotychczasowym, dobrze znanym z literatury, wynikiem z tego obszaru jest twierdzenie należące do C. Batty'ego mówiące, że jeżeli  $X$  jest przestrzenią Banacha,  $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$  jest półgrupą silnie ciągłą i jednostajnie ograniczoną ( $\sup_{t \geq 0} \|T(t)\| \leq M < \infty$ ), to warunek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)A^{-1}\| = 0\tag{5}$$

jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sigma(A) \cap j\mathbb{R} = \emptyset$ , gdzie  $\sigma(A)$  jest widmem operatora  $A$ . Dla półgrupy ograniczonej warunek  $\sigma(A) \cap j\mathbb{R} = \emptyset$  oznacza, że  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$ . Z prac G. Sklyara wiadomo również, że dla półgrupy nieograniczonej warunek  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$  jest konieczny dla asymptotycznej zbieżności (5).

2. W obszarze **analizy nieskończenie wymiarowego równania różniczkowego z opóźnieniem** o postaci

$$\dot{z}(t) = A_1 z(t-1) + \int_{-1}^0 A_2(\theta) z(t+\theta) d\theta + \int_{-1}^0 A_3(\theta) z(t+\theta) d\theta.\tag{6}$$

gdzie  $z(t) \in X$ ,  $X$  jest przestrzenią Banacha, a  $A_1, A_2(\theta), A_3(\theta)$  dla  $\theta \in [-1, 0]$  są liniowymi, ograniczonymi operatorami na  $X$ , spełniającymi dodatkowe założenia. Poprzez wprowadzenie nowej funkcji, opisującej stan, oraz odpowiednio zdefiniowany operator  $A$  na nowej przestrzeni stanu  $X \times L^p([-1, 0]; X)$ , skomplikowany model (6) daje się sprowadzić do postaci (1)-(3). Przyjmując  $X = H$ , gdzie  $H$  jest ośrodkową przestrzenią Hilberta, oraz przestrzeń stanu w postaci  $H \times L^2([-1, 0]; H)$  można pokazać, że istnieje w niej baza Rieszowa złożona z nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni niezmienniczych dla operatora  $A$ . Stwarza to potencjalne możliwości zbadania szeregu właściwości układu, w tym jego stabilność. Znane dotychczas wyniki dla równania o postaci (6), opublikowane m.in. w pracy G. Sklyara, R. Rabaha i A. Rezounenki, zakładają, że  $A_1, A_2(\theta), A_3(\theta)$  są macierzami.

**W tym kontekście tematykę badań podjętych przez mgr. Bartosza Wasilewskiego w rozprawie doktorskiej uważam za bardzo aktualną i istotnie ważną z punktu widzenia rozwoju i zastosowań teorii silnie ciągłych półgrup operatorów.**

## 2.2 Omówienie zawartości rozprawy

Rozprawa obejmuje 69 stron, na które składają się: strona tytułowa, oświadczenie doktora, streszczenie w języku polskim i angielskim, słowa kluczowe, przedmowa (Preface), podziękowania, spis treści, trzy właściwe rozdziały (Chapter 1, 2, 3) oraz bibliografia, zawierająca 39 pozycji.

**Przedmowa** *Preface* zawiera krótkie wprowadzenie do nieskończenie wymiarowego zagadnienia Cauchy'ego i związanego z nim pojęcia silnie ciągłej półgrupy operatorów oraz szkicowo omawia wyniki zawarte w rozprawie w kontekście znanych wyników literaturowych. Wyraźnie zakreślone są dwie grupy wyników, które można uznać za opis części składowych **celu rozprawy**, chociaż Autor nie używa takiego określenia. Cel ten obejmuje *analizę asymptotycznych właściwości silnie ciągłych półgrup operatorów oraz analizę nieskończenie wymiarowego równania z opóźnieniem typu neutralnego* i został dokładniej opisany w punktach 1 i 2 poprzedniego podrozdziału niniejszej recenzji. Tak sformułowany cel precyzyjnie określa zakres istotnych zadań badawczych, których rozwiązania podejmuje się Kandydat. Zadania te są ambitne i przy ich rozwiązywaniu Autor będzie musiał wykazać się wiedzą teoretyczną z zakresu analizy funkcjonalnej, teorii silnie ciągłych półgrup, teorii operatorów, w tym teorii spektralnej oraz teorii równań różniczkowych.

**Rozdział 1** pt. *Functional analytic tools* przedstawia wybrane pojęcia i wyniki z różnych działów matematyki, do których Autor odwołuje się w dalszych częściach pracy. Obejmują one elementy teorii silnie ciągłych półgrup i powiązane z nią elementy spektralnej teorii operatorów, pojęcia projekcji spektralnej (projekcji Rieszowa) i bazy Rieszowa złożonej z nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni, całkę Bochnera i przestrzeń Bochnera, operatory Hilberta-Schmidta i kilka wyników z analizy funkcjonalnej.

**Rozdział 2** pt. *On the relative decay of unbounded  $C_0$ -semigroups on the domain of the generator* zawiera wyprowadzenie zależności charakteryzującej względny wzrost lub zanikanie normy silnie ciągłej półgrupy na dziedzinie jej generatora. Główny wynik sformułowany jest w Twierdzeniu 52 o postaci:

**Twierdzenie.** Dana jest przestrzeń Banacha  $X$ , silnie ciągła półgrupa  $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$  z generatorem  $A$  i wskaźnikiem wzrostu  $\omega_0 > -\infty$  oraz dodatnia funkcja  $f(t) : [0, \infty) \ni t \mapsto f(t) \in (0, \infty)$  taka, że

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{f(t+s)}{f(s)} = e^{\omega_0 t}, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

oraz

$$\|T(t)\| \leq f(t), \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Jeżeli dla każdego  $\lambda \in \sigma(A) \cap (\omega_0 + j\mathbb{R})$  istnieje ograniczona krzywa gładka  $\Gamma_\lambda \subset \mathbb{C}$  obejmująca punkt  $\lambda$ , taka, że  $\Gamma_\lambda \cap \sigma(A) = \emptyset$  i spełniony jest warunek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|T(t)P_{\Gamma_\lambda}\|}{f(t)} = 0, \quad (9)$$

gdzie  $P_{\Gamma_\lambda}$  jest projekcją Riesz, zdefiniowaną zależnością

$$P_{\Gamma_\lambda} = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_\lambda} (A - \mu I)^{-1} d\mu, \quad (10)$$

to dla każdego  $\mu \in \rho(A)$  zachodzi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|T(t)(A - \mu I)^{-1}\|}{f(t)} = 0. \quad \square \quad (11)$$

Autor przeprowadza dowód twierdzenia dla  $\omega_0 = 0$ , a przypadek dowolnego  $\omega_0$  można udowodnić podstawiając przeskalowaną półgrupę  $(e^{-\omega_0 t} T(t))_{t \geq 0}$ . Sam dowód oparty jest na idei z pracy G. Sklyra i P. Polaka. Dowód istnienia funkcji  $f(t)$  spełniającej warunki (7) i (8) można znaleźć w pracy G. Sklyra. Możliwości wykorzystania Twierdzenia 52 zilustrowane są dwoma przykładami z operatorem  $A$  generującym półgrupę nieograniczoną i posiadającym przeliczalne, pojedyncze, czysto urojone widmo.

**Rozdział 3** pt. *Delay differential equations of the neutral type in the infinite-dimensional separable Hilbert space* zawiera analizę następującego liniowego równania różniczkowego z opóźnieniem typu neutralnego, zdefiniowanego na nieskończonej wymiarowej przestrzeni Banacha  $X$ ,

$$\dot{z}(t) = A_1 \dot{z}(t-1) + \int_{-1}^0 A_2(\theta) \dot{z}(t+\theta) d\theta + \int_{-1}^0 A_3(\theta) z(t+\theta) d\theta, \quad (12)$$

z warunkiem początkowym  $z_0(\cdot) \in W^{1,p}([-1, 0]; X)$  dla  $p \geq 1$ , gdzie  $A_1$  jest liniowym, ograniczonym operatorem na  $X$ , a  $A_{2,3}(\cdot) \in L^q([-1, 0]; \mathcal{L}(X))$  oraz  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Wprowadzając przestrzeń  $X \times L^p([-1, 0]; X)$  można równanie (12) przepisać w postaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y(t) \\ z_t(\cdot) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y(t) \\ z_t(\cdot) \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} y(t) \\ z(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^0 A_2(\theta) \dot{z}(\theta) d\theta + \int_{-1}^0 A_3(\theta) z(\theta) d\theta \\ dz(\theta)/d\theta \end{bmatrix}, \quad (13)$$

gdzie  $z_t(\cdot) = z(t + \cdot)$  i dziedziną operatora  $A$  zdefiniowaną zależnością

$$D(A) = \{(y, z(\cdot)) : z(\cdot) \in W^{1,p}([-1, 0]; X), y = z(0) - A_1 z(-1)\} \subset X \times L^p([-1, 0]; X). \quad (14)$$

Korzystając z twierdzenia Banacha o punkcie stałym Autor pokazał, że równanie różniczkowe (13) posiada jednoznaczne klasyczne rozwiązanie. Następnie, udowadniając warunek  $\rho(A) \neq \emptyset$ , udowodnił, że operator  $A$  na przestrzeni  $X \times L^p([-1, 0]; X)$  generuje silnie ciągłą półgrupę.

Od tego miejsca, dalsze rozważania ograniczone są do przestrzeni Hilberta, przy następujących założeniach:

(A1)  $p = q = 2$  i  $X = H$ , gdzie  $H$  jest ośrodkową przestrzenią Hilberta.

(A2)  $\log \sigma(A) + 2k\pi j \subset \text{Int } O_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

gdzie  $\text{Int } O_k$  są zbiorami otwartymi, spełniającymi warunek  $\text{Int } O_k \cap \text{Int } O_l = \emptyset$  dla  $k \neq l$ , objętymi krzywymi  $L_k = L_0 + 2k\pi j$ , dla pewnej gładkiej, ograniczonej krzywej  $L_0$ , obejmującej zbiór  $\log \sigma(A)$  i takiej, że  $\log \sigma(A) \cap L_0 = \emptyset$ .

Równanie (13) jest teraz zdefiniowane na przestrzeni Hilberta

$$M_2 := H \times L^2([-1, 0]; H) \quad (15)$$

z iloczynem skalarnym

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ \psi(\cdot) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ \phi(\cdot) \end{bmatrix} \right\rangle_{M_2} = \langle x, y \rangle_H + \int_{-1}^0 \langle \psi(\theta), \phi(\theta) \rangle_H d\theta, \quad (16)$$

i normą indukowaną przez ten iloczyn. Ponadto, przyjmuje się dodatkowo założenie

$$(A3) \ A_{2,3}(\cdot) \in L^2([-1, 0]; \mathcal{L}_{HS}(H)),$$

gdzie  $\mathcal{L}_{HS}(H) \subset \mathcal{L}(H)$  jest przestrzenią operatorów Hilberta-Schmidta, będącą domkniętą podprzestrzenią przestrzeni  $\mathcal{L}(H)$ . Najwartościowszym wynikiem tego rozdziału jest pokazanie istnienia bazy Riesz'a w przestrzeni  $M_2$  złożonej z nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni niezmienniczych dla operatora  $A$ . Wynik ten zawarty jest w Twierdzeniu 74 o postaci:

**Twierdzenie.** Jeżeli spełnione są założenia (A1), (A2) i (A3), to istnieje  $N \in \mathbb{N}_0$  takie, że dla  $|k| \geq N$  zachodzi  $L_k \subset \rho(A)$  i podprzestrzenie przestrzeni  $M_2$ , które są obrazami projekcji Riesz'a  $P_k$ , gdzie

$$P_k = -\frac{1}{2\pi j} \int_{L_k} (A - \mu I)^{-1} d\mu, \quad (17)$$

razem z obrazem ortogonalnej projekcji  $P_\alpha$  na podprzestrzeń  $\overline{\text{span}(P_k M_2, |k| \geq N)}^\perp$ , tworzą bazę Riesz'a przestrzeni  $M_2$ .  $\square$

Twierdzenie 74 zilustrowane jest prostym przykładem równania różniczkowego z opóźnieniem, zdefiniowanego na przestrzeni  $H = L^2[0, 1]$ .

Rozprawa kończy się **Bibliografią Bibliography** zawierającą 39 pozycji, głównie w języku angielskim (kilka w języku rosyjskim), wszystkie związane z tematyką rozprawy lub zawierające opis wykorzystywanych narzędzi matematycznych. Spis ten jest w miarę kompletnym kompendium wiedzy z obszaru tematycznego rozprawy.

Rozprawa jest dopracowana pod względem językowym i edytorskim. Autor posługuje się precyzyjnym językiem, stosując właściwe słownictwo, a rozważania i tok rozumowania prowadzone są w sposób logiczny. Zanim Autor sformułuje problem, zamieszcza krótkie wprowadzenie, a następnie jasno stawia i rozwiązuje rozważany problem. Rozprawę można uznać za przykład dobrze napisanej pracy doktorskiej.

### 2.3 Ocena wyników

Wyniki, realizujące cel rozprawy, zawarte są w Rozdziale 2 i Rozdziale 3.

Główny wynik Rozdziału 2, zawarty w Twierdzeniu 52, jest **nietrywialnym rozszerzeniem** znanych wyników literaturowych. Przede wszystkim, warunki twierdzenia dopuszczają półgrupy nieograniczone, a Przykład 51 pokazuje, że warunek  $\sigma(A) \cap (\omega_0 + j\mathbb{R}) = \emptyset$  nie jest konieczny dla zbieżności (11). Ponadto, nietrudno zauważyć, że w przypadku półgrupy ograniczonej z twierdzenia tego łatwo wynika, że warunek  $\sigma(A) \cap j\mathbb{R} = \emptyset$  implikuje zbieżność (5), czyli część dostateczną wspomnianego twierdzenia C. Batty'ego. Ponadto, jeżeli funkcja  $f(t)$  z twierdzenia spełnia warunek  $cf(t) \leq \|T(t)\| \leq Cf(t)$ ,  $t \geq 0$ , to otrzymujemy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|T(t)(A - \mu I)^{-1}\|}{\|T(t)\|} = 0. \quad (18)$$

Warto tutaj podkreślić, że wyniki zawarte w tym rozdziale ukażą się w czasopiśmie *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*.

Natomiast główny wynik Rozdziału 3, zawarty w Twierdzeniu 74, jest również **nietrywialnym rozszerzeniem** wyników pracy R. Rabaha, G. Sklyara i A. Rezounenki na przypadek nieskończenie wymiarowy. Pokazanie, że dla operatora  $A$  z zależności (13) istnieje baza Riesz'a

utworzona przez nieskończenie wymiarowe podprzestrzenie, niezmiennicze dla  $A$ , potencjalnie może pozwolić na dalszą analizę właściwości równania (12). Niestety, Autor nie zamieszcza żadnych sugestii w tym kierunku.

Podsumowując, uważam, że **cel rozprawy** sformułowany przez Autora w rozdziale *Preface* **został w pełni zrealizowany**.

#### 2.4 Uwagi i komentarze

1. Praca jest dobrze napisana i nie dopatrzyłem się w niej błędów merytorycznych.
2. Podane przykłady dobrze ilustrują wyniki z punktu widzenia matematyki, ale wydają się zbyt abstrakcyjne, aby można było je powiązać z praktycznymi przypadkami układów spotykanych w fizyce lub technice.
3. Praca nie zawiera, typowego dla klasycznej rozprawy doktorskiej, podsumowania oraz przedstawienia możliwych kierunków dalszych badań. Interesujące byłoby przedstawienie przez Kandydata takich planów. Przykładowo, z punktu widzenia zastosowań w teorii sterowania układami nieskończenie wymiarowymi interesujące jest zagadnienie: Jeżeli  $A$  generuje silnie ciągłą i *względnie stabilną* półgrupę, to kiedy addytywnie zaburzony operator  $A + P$  również generuje silnie ciągłą i *względnie stabilną* półgrupę?
4. Bibliografię można by uzupełnić o artykuł: *L. Paunonen i H. Zwart, A Lyapunov approach to strong stability of semigroups, Systems and Control Letters 62(2013), str. 673-678*, który pokazuje jak cytowane w rozprawie wyniki W. Arendta, C. Batty'ego, Y. Lyubicha i Vu Phonga, dotyczące silnej stabilności ograniczonej półgrupy, można udowodnić korzystając z właściwości rozwiązania operatorowego równania Lyapunowa.

### 3 Wniosek końcowy

Przedstawione w Podpunkcie 2.4 uwagi mają charakter dyskusyjny i nie wpływają na moją ogólną opinię o rozprawie. Recenzowana praca posiada wszystkie niezbędne cechy rozprawy doktorskiej z dziedziny nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka:

- **Pokazuje szeroką wiedzę teoretyczną** Autora z analizy funkcjonalnej, teorii silnie ciągłych półgrup operatorów na przestrzeniach Banacha i Hilberta oraz innych obszarów matematyki oraz **umiejętność jej praktycznego wykorzystania do samodzielnego prowadzenia badań naukowych** (w tym przypadku jest to wiedza obejmująca własności przestrzeni Banacha i Hilberta, przestrzeni funkcyjnych, całki Bochnera, projekcji spektralnych, nieskończenie wymiarowych baz Riesz, nieskończenie wymiarowych równań różniczkowych z opóźnieniami).
- Zawiera **sformułowanie i rozwiązanie oryginalnego problemu naukowego**, które istotnie uzupełniają i poszerzają istniejącą wiedzę (w tym przypadku jest to zbadanie własności asymptotycznych pewnej klasy silnie ciągłych półgrup oraz zastosowanie tej teorii i spektralnej teorii operatorów do analizy nieskończenie wymiarowego równania różniczkowego z opóźnieniem typu neutralnego).

Podsumowując, jednoznacznie stwierdzam, że rozprawa mieści się w aktualnym obszarze badawczym analizy funkcjonalnej, teorii silnie ciągłych półgrup operatorów oraz spektralnej teorii operatorów, będących istotnymi działami dyscypliny naukowej **matematyka**, i **spełnia** wszystkie wymogi określone w Art. 187 ust. 1-3 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* (Dz. U. z 2023 r. poz. 742 ze zm.). Na tej podstawie wnioskuję o **dopuszczenie** rozprawy do publicznej obrony.