Recenzja pracy doktorskiej
Analiza asymptotyczna i narzędzia analityczne dla pewnych typów C_0-półgrup
napisanej przez mgra Bartosza Wasilewskiego

Dr hab. Jan Rozendaal, prof. IMPAN
Instytut Matematyki Polskiej Akademii Nauk

Informacje ogólne. Dysertacja "Analiza asymptotyczna i narzędzia analityczne dla pewnych typów C_0-półgrup" napisana przez mgra Bartosza Wasilewskiego dotyczy teorii równań ewolucyjnych i C_0-półgrup operatorów. Zawarte w pracy rezultaty wiążą się z dwoma, dość odległymi, tematami: zachowaniem asymptotycznym C_0-półgrup i bazami Riesza związanymi z równaniami różniczkowymi z opóźnieniem.
Praca została napisana w Uniwersytecie Szczecińskim, pod opieką promotora prof. dr. hab. Grigorija M. Sklyara (promotorem pomocniczym jest dr Piotr Polak). Zawiera 69 stron, z których 57 stron stanowi treść matematyczna podzielona na trzy rozdziały.

Inne prace matematyczne mgra Wasilewskiego są następujące:

(1) G.M. Sklyar, P. Polak and B. Wasilewski, *On the relative decay of unbounded semigropus on the domain of the generator.* Przyjęta do druku w Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.
(2) G.M. Sklyar, P. Polak and B. Wasilewski, *On the extension of Batty's theorem on the semigroup asymptotic stability* . Dostępna pod adresem https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.01233, 2021.
(3) G.M. Sklyar, P. Polak and B. Wasilewski, *Some Notes on the Asymptotic Behavior of Unbounded Semigroups on the Domain of the Generator.* 2023 31st Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), Limassol, Cyprus, 2023, pp. 989-993.
(4) G.M. Sklyar and B. Wasilewski, *The Riesz basis property of infinite-dimensional delay differential equations.*. W przygotowaniu.

Artykuły (1), (3) i (4) były wymienione w dokumentacji związanej z dysertacją; artykuł (2) nie był tam wspomniany, ale jest dostępny online. Niestety, nie byłem w stanie uzyskać dostępu do pozycji (1), (3) i (4). W przypadku pozycji (1), artykuł wydaje się, że nie został jeszcze opublikowany i nie przysłano mi linka do preprintu artykułu. W przypadku pozycji (3), wydaje się, że nie ma ogólnie dostępnego online preprintu, a nie byłem w stanie uzyskać dostępu do odpowiednich materiałów pokonferencyjnych przez moją macierzystą instytucję. Wreszcie, do momentu napisania tej recenzji nie byłem w stanie zlokalizować wersji online artykułu (4).

W dysertacji wskazuje się, że rozdział 2 oparty jest na rezultatach z artykułu (1). Analiza artykułu (2) pokazuje jednak, że zawartość rozdziału 2 pokrywa się w dużej części z treścią (2), co nasunęło mi podejrzenie, że pozycja (2) może być preprintem artykułu (1). Z drugiej strony, tytuł i abstrakt artykułu (3) wskazują, że jego zawartość jest również powiązana z zawartością pozycji (1) i (2).

Byłoby bardzo pożądane, gdyby pozycje (1), (3) i (4) zostały wcześniej udostępnione recenzentowi (i ogólniej, w przypadku pozycji (1) i (3), szerszej społeczności akademickiej). Co więcej, powiązania między treścią pozycji (2), a wynikami zawartymi w dysertacji powinny być wyjaśnione. Bez takiego wyjaśnienia, byłem zmuszony ograniczyć się do spekulacji odnośnie związku pomiędzy tymi artykułami, a pracą doktorską.

Chciałbym również odnotować, że nie otrzymałem żadnych oświadczeń współautorów odnośnie wkładu mgra Wasilewskiego w wymienione powyżej artykuły, czy też w wyniki zawarte w dysertacji. Stąd jestem również zmuszony do spekulacji odnośnie wkładu mgra Wasilewskiego w tym zakresie.

Treść dysertacji. Dysertacja dotyczy równań ewolucyjnych postaci

$$\dot{u}(t) = Au(t), \qquad t \geq 0, \tag{0.1}$$

dla funkcji $u : (0, \infty) \to X$ o wartościach w przestrzeni Banacha X, i (w ogólności nieograniczonego) operatora A na X. Abstrakcyjny problem Cauchy'ego związany z takim równaniem w naturalny sposób prowadzi do teorii silnie ciągłych półgrup (C_0-półgrup) operatorów na X. Ta teoria ma długą i pełną sukcesów historię (zobacz, np. [2,5]) i stała się strukturą dla systematycznych badań nad równaniami ewolucyjnymi.

Od jej powstania, tematem w centrum uwagi teorii równań ewolucyjnych było zachowanie asymptotyczne C_0-półgrup, co z kolei jest powiązane z długoterminowym zachowaniem rozwiązań równania (0.1) (zobacz np. [8]). Do fundamentalnych rezultatów dotyczących silnej stabilności C_0-półgrup należą, między innymi, [4,6]. Od około piętnastu lat uwaga naukowców przesunęła się w kierunku tak zwanego *półjednostajnego zaniku* (zobacz np. [3,4]). Dla C_0-półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ o odwracalnym generatorze A, to zjawisko związane jest z oszacowaniami normy $T(t)A^{-1}$ gdy $t \to \infty$. Takie oszacowania są z kolei ściśle związane z własnościami spektralnymi operatora A, co jest już widoczne w przypadku skończenie wymiarowym. Pierwszy ważny rezultat dysertacji, w rozdziale 2 dotyczy półjednostajnego zaniku przy odpowiednich warunkach spektralnych nałożonych na A.

Typowo, teoria asymptotyczna C_0-półgrup zajmuje się wywodzeniem stwierdzeń dotyczących asymptotycznego zachowania półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ z własności spektralnych jej generatora A. W przypadku, gdy bazowa przestrzeń Banacha jest przestrzenią Hilberta, która ma bazę ortonormalną wektorów własnych A, ten problem niezmiernie się upraszcza. Nieco słabszy, chociaż wciąż bardzo dogodny warunek to posiadanie przez X bazy Riesza podprzestrzeni, które są niezmiennicze pod działaniem A. Drugi z wyników rozdziału 3 dotyczy baz Riesza podprzestrzeni niezmienniczych związanych ze szczególnym rodzajem równań ewolucyjnych pojawiających się przy badaniu równań różnicowo-różniczkowych.

Ostatecznie, rozdział 1 ma charakter wprowadzenia i obejmuje podstawy niezbędne do zaprezentowania reszty dysertacji.

Rozdział 1. Rozdział podzielony jest na pięć podrozdziałów: pierwszy, dotyczący teorii spektralnej i C_0-półgrup, drugi, dotyczący rzutowania Riesza i baz Riesza podprzestrzeni, kolejny, dotyczący całek Bochnera, czwarty, dotyczący operatorów Hilberta-Schidta i ostatni zawierający treści pomocnicze.

Pierwszy podrozdział zawiera niektóre podstawowe wiadomości o spektrum operatorów nieograniczonych na przestrzeniach Banacha oraz o asymptotyce dla C_0-półgrup i powiązanych równaniach ewolucyjnych. Zgromadzone są tu niektóre bardzo podstawowe fakty i definicje, co pozwala czytelnikowi wygodnie po nie sięgnąć przy lekturze dalszej części dysertacji.

Drugi podrozdział zawiera materiał dotyczący baz Riesza podprzestrzeni przestrzeni Hilberta. Te definicje i rezultaty z całą pewnością rzadziej stanowią codzienne narzędzie w pracy badaczy równań ewolucyjnych. Niemniej, podrozdział ten jest dość ważny, ponieważ rzutowania Riesza i bazy Riesza podprzestrzeni rzeczywiście pojawiają się w rozdziałach 2 i 3, stanowiąc w ten sposób powiązanie między dwoma głównymi rezultatami pracy.

Następne dwa podrozdziały dotyczące całkowania Bochnera i operatorów Hilberta-Schmidta, zawierają kilka bardzo podstawowych rezultatów związanych z tymi tematami.

Ostatni podrozdział wprowadza przestrzenie Soboleva funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha, w połączeniu z rachunkiem funkcjonalnym Riesza-Dunforda funkcji holomorficznych dla operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha X.

Moim zdaniem, rozdział pierwszy jest dobrze napisany i dogodnie uporządkowany. Rezultaty i definicje są w większości bardzo podstawowe, ale bardzo dobrze jest mieć je pod ręką poczas lektury pozostałej części dysertacji.

Rozdział 2. Jak już wspomniałem powyżej, rozdział ten dotyczy półjednostajnego zaniku C_0-półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ o generatorze A na przestrzeni Banacha X, tzn. zachowania $||T(t)R(\lambda, A)||$

przy $t \to \infty$. Tu $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$ jest rezolwentą w danym punkcie $\lambda \in \rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$.

Wiadomo z [3], że jeśli $(T(t))_{t\geq 0}$ jest jednostajnie ograniczona, to mamy $||T(t)R(-1, A)|| \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Z drugiej strony, jeśli $(T(t))_{t\geq 0}$ nie jest jednostajnie ograniczona, to dla pewnych wartości $\lambda \in \rho(A)$ możemy mieć nadal $||T(t)R(\lambda, A)|| \to 0$ przy $t \to \infty$ nawet, gdy $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$.

Pożądane byłoby również otrzymanie ogólniejszych oszacowań dla $||T(t)R(\lambda, A)||$ przy $t \to \infty$, np. stwierdzeń postaci

$$\frac{||T(t)R(\lambda, A)||}{\alpha(t)} \to 0 \qquad \text{przy} \qquad t \to \infty, \tag{0.2}$$

dla odpowiedniego $\alpha : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Tego typu stwierdzenie pojawia się w [7]. Mówi, że jeśli $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ i jeśli α ma zredukowaną wagę, która nie jest quasi-analityczna (definicje znajdują się w podroździale 2.1 dysertacji) oraz spełnia warunek $||T(t)|| \leq \alpha(t)$ dla wszystkich $t \geq 0$, to spełnione jest (0.2). W istocie, artykuł [7] głównie dotyczy ograniczeńw przypadku rachunku funkcjonalnego Hille-Philipsa dla A, zaś (0.2) jest szczególnym przypadkiem takiego oszacowana.

Główny rezultat rozdziału 2 dysertacji, twierdzenie 52, rozszerza część wyników z [3,7] uzyskując warunek (0.2) dla półgrup nieograniczonych bez założenia, że $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Z grubsza rzecz biorąc, główne twierdzenie mówi, że jeśli dla każdego $\lambda \in \sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ projekcja spektralna P_λ związana z λ jest dobrze określona przez rachunek funkcjonałów holomorficznych i spełnia warunek

$$\lim_{t\to\infty} \frac{||T(t)P_\lambda||}{\alpha(t)} = 0,$$

to zachodzi własność (0.2). Tu α spełnia odpowiedni warunek dotyczący wzrostu i jest takie, że $||T(t)|| \leq \alpha(t)$ dla wszystkich $t \geq 0$. To oczywiście należy porównać ze szczególnym przypadkiem, gdy X jest przestrzenią Hilberta, a P_λ są projekcjami na przestrzenie własne związane z bazą ortonormalną wektorów własnych A. W rzeczywistości, przykłady użyte w podrozdziale 2.3 dla zilustrowania głównego twierdzenia zostały wywiedzione poprzednich założeń przez (być może) zmianę normy w bazowej przestrzeni Hilberta.

Dowód twierdzenia 52 opiera się na interesującej konstrukcji z teorii operatorów, związanej z półgrupą $(\tilde{T}(t))_{t\geq 0}$ związaną z $(T(t))_{t\geq 0}$, ale działającą na podprzestrzeni $\tilde{X}$ przestrzeni $\mathcal{L}(X)$ operatorów ograniczonych na X, oraz nietrywialnej normie na przestrzeni ilorazowej $\tilde{X}$. W mojej ocenie, ten dowód stanowi najsilniejszy punkt dysertacji. Należy jednak zauważyć, że pomysły zastosowane w dowodzie pojawiały się już wcześniej w literaturze, w tym w pracach dwóch promotorów mgra Wasilewskiego. Stąd nie jest dla mnie jasne jaki był wkład mgra Wasilewskiego w koncepcję tego dowodu.

Na końcu podrozdział 2.3 zawiera dwa przykłady, które mają zilustrować siłę twierdzenia 52. Jeden z nich jest dość prosty podczas, gdy drugi wymaga więcej obliczeń szczególnie, gdy spróbujemy uzyskać odpowiednie oszacowania zaniku bez stosowania twierdzenia 52. Należy odnotować, że nie jest w pełni jasne, że inny sposób obliczeń 'na piechotę', niż ten zastosowany przez autorów nie byłby również skuteczny i prostszy, ale z drugiej strony z pewnością rozsądne wydaje się być oczekiwanie, że twierdzenie 52 pomaga tu uzasadnić oszacowania zaniku. Kolejna uwaga jest taka, że chociaż te przykłady są sformułowane w prosty sposób i eleganckie z punktu widzenia teorii operatorów, nie wydają się jednak wywodzić od konkretnych równań różniczkowych cząstkowych. To jest wada zważywszy, że niektóre z najlepszych zastosowań oszacowań półjednostajnego zaniku dotyczą równań różniczkowych cząstkowych (np. stłumionych równań falowych). Byłoby bardzo interesujące, gdyby można było poznać konkretne zastosowania rezultatów przedstawionych w tym rozdziale.

Rozdział 3. Rozdział ten poświęcony jest równaniom różnicowo-różniczkowym postaci:

$$\dot{z}(t) = A\dot{z}(t) + \int_{-1}^{0} A_2(\theta)\dot{z}(t+\theta)d\theta + \int_{-1}^{0} A_3(\theta)\dot{z}(t+\theta)d\theta, \qquad t \geq 0. \tag{0.3}$$

Tu $z : [-1, \infty) \to X$ spełnia warunek $\mathbf{1}_{[-1,0]}z \in W^{1,p}([-1,0]; X)$ dla przestrzeni Banacha X i $p \in [1, \infty)$ i mamy $A_2, A_3 \in L^q([-1,0]; \mathcal{L}(X))$ dla q będącego sprzężeniem Höldera p. Można przeformułować (0.3) w dogodny (i nie całkiem trywialny) sposób, jako równanie evolucyjne, co umieszcza je w zasięgu technik stosowanych w dysertacji. W szczególności, gdy X jest przestrzenią Hilberta, można rozważać bazy Riesza podprzestrzeni, które są niezmiennicze względem generatora stowarzyszonej półgrupy.

Głównym rezultatem rozdziału jest istnienie takiej bazy. Jak już wspomniano, istnienie bazy Riesza podprzestrzeni niezmienniczych pozwala uzyskać własności asymptotyczne stowarzyszonego równania ewolucyjnego. To, w połączeniu z zastosowaniem rzutu Riesza w dowodach, wydaje się być najbardziej realnym związkiem pomiędzy dwoma problemami rozważanymi w pracy. Z drugiej strony, nie jest podane żadne zastosowanie rezultatów z rozdziału 3 do oszacowań zaniku dla równania postaci (0.3). Uwaga 75 dostarcza przykładu, do którego stosowałby się główny rezultat tego rozdziału, ale żadne własności asymptotyczne nie są rozważane.

Po sformułowaniu problemu w podrozdziale 3.1, w podrozdziale 3.2 dowodzone są pewne wstępne rezultaty takie, jak fakt, że równanie (0.3) jest dobrze pozycjonowane jako równanie ewolucyjne. Ustalane są także pewne podstawowe dane spektralne generatora A stowarzyszonej C_0-półgrupy, w tym wzór na rezolwentę A. Od tego miejsca X jest przyjmowana jako przestrzeń Hilberta, i w polu zainteresowania pojawiają się ponownie bazy Riesza podprzestrzeni z rozdziału 1. Ustalane są rozmaite własności projekcji na takie podprzestrzenie. Należy tu odnotować, że projekcje są tu ponownie dane za pomocą rachunku funkcjonałów holomorficznych, a te są dobrze określone, co wynika z charakteru spektrum A. Pomimo, że podrozdział ten zawiera rezultaty wstępne, jest on tak naprawdę najdłuższym z podrozdziałów dysertacji i większość ciężkiej pracy wykonanej w rozdziale 3 ma miejsce tutaj.

Z drugiej strony, podrozdział 3.3, gdzie dowodzony jest główny rezultat rozdziału 3, wciąż wymagał całkiem dużego wysiłku. W toku podrozdziału, kluczowym punktem dowodu wydaje się porównanie własności rezolwenty A i rezolwenty operatora $\overline{A}$, który jest powiązany z równaniem (0.3) w przypadku, gdy $A_2 = A_3 \equiv 0$. Ten ostatni jest o wiele łatwiejszy w obsłudze, a zarazem $\overline{A}$ dziedziczy wiele własności A poprzez perturbację. Nie jest to jednakże jedyny składnik dowodu, który moim zdaniem jest bardziej zawiły niż dowód głównego rezultatu w rozdziale drugim.

W istocie, rozdział 3 jest sam w sobie dość imponujący, a stosowana w nim matematyka jest zarówno nietrywialna, jak i wymagająca dużo wysiłku. Z drugiej strony, konieczne jest zwrócenie uwagi na fakt, że takie samo twierdzenie zostało udowodnione w przypadku skończenie wymiarowym, przy $X = \mathbb{C}^n$, przez promotora kandydata, i w tym przypadku dokonał on dokładniejszej analizy. Jako, że stosunkowo powszechne (choć w żadnej mierze nie automatyczne) jest zjawisko, że problemy skończenie wymiarowe uogólniają się do ośrodkowych przestrzeni Hilberta, to naturalne jest pytanie, które spośród pomysłów w tym rozdziale pochodzą od mgra Wasilewskiego.

Ocena dysertacji. Według mojej oceny, zawartość matematyczna dysertacji jest na poziomie wystarczająco wysokim na pracę doktorską. Rezultaty jako takie zapewne nie są przełomowe, ale techniki dowodzenia są nietrywialne, a niektóre niestandardowe.

Z drugiej strony, nie jest dla mnie jasne w jakim zakresie rozumowania w dowodach są autorstwa mgra Wasilewskiego. Jak już wspominałem powyżej, najważniejsze spośród rozumowań pojawiały się wcześniej w literaturze, a nawet w pracach promotora kandydata.

Co więcej, biorąc pod uwagę fakt, że inne prace matematyczne mgra Wasilewskiego takie, jak artykuły, na których opiera się praca doktorska, nie zostały mi udostępnione i nie są szeroko dostępne matematycznej społeczności, trudno jest ocenić na ile praca doktorska się od nich różni. Tu chciałbym odnotować, że preprint (2), który nie był wymieniony w dokumentacji towarzyszącej dysertacji, jest prawie identyczny w formie i treści z rozdziałem 2 pracy. Wydaje się zatem, że rozdział został bezpośrednio, bez żadnych modyfikacji zaczerpnięty z tego preprintu. Samo w sobie nie stanowi to problemu i jest w rzeczywistości powszechną praktyką przy pracach doktorskich, ale brak jasności odnośnie innych prac kandydata zdecydowanie prowadzi do dezorientacji.

Pracę odbieram jako dobrze napisaną i zawiera ona niewiele pomyłek drukarskich.

Wniosek. Przedstawiona praca spełnia wymogi stawiane pracom doktorskim przez art. 187 ust. 1-3 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce" (Dz. U. z 2023 r. poz. 742 ze zm.). Wnoszę zatem o dopuszczenie mgra Wasilewskiego do dalszych procedur związanych z uzyskaniem stopnia doktora w dyscyplinie matematyka.

LITERATURA

[1] Wolfgang Arendt and Charles J. K. Batty, *Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups*. Trans. Amer. Math. Soc., 306(2):837-852, 1988.

[2] Wolfgang Arendt, Charles J. K. Batty, Matthias Hieber and Frank Neubrander, *vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*. Monographs in Mathematics vol. 96, Birkhäuser/Springer Basel A.G., Basel, second edition, 2011.

[3] Charles J. K. Batty and Thomas Duyckaerts, *Non-uniform stability for bounded semi-groups on Banach spaces*. J. Evol. Equ., 8(4): 765-780, 2008.

[4] Ralph Chill, David Seifert and Yuri Tomilov, *Semi-uniform stability of operator semigroups and energy decay of damped waves*. Philos. Trans. Roy. Soc. A, 378(2185): 20190614, 24, 2020.

[5] Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Graduate Texts in Mathematics vol. 194, Springer-Verlag, New York, 2000. With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.

[6] Yu. I. Lyubich and Vũ Quôc Phóng, *Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces*. Studia Math., 88(1):37-42, 1988.

[7] Vũ Quôc Phóng, *Semigroups with nonquasianalytic growth*. Studia Math., 104(3):229-241, 1993.

[8] Jan van Neerven, *The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators*. Operator Theory, vol. 88: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.

Warszawa, 25-12-2023
Jan Rozendaal

Tłumaczenie: dr Ewa Ciechanowicz

Ewa Ciechanowicz