

University of Szczecin

Institute of Mathematics

mgr Hanna Stojakowska

Title of the dissertation: Real hyperfields

Supervisor: prof. dr hab. Franz-Viktor Kuhlmann

Summary of the dissertation

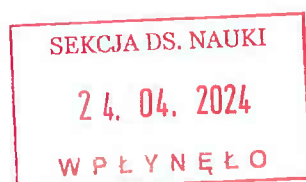
Hyperfields are a generalization of fields in which addition is multivalued and multiplication is single-valued. They were introduced by Krasner in 1956. In 2006 Marshall introduced the concept of a real hyperfield. We say that a hyperfield is real if it admits at least one positive cone. In this thesis, we develop the theory of real hyperfields. We introduce the notion of a positive cone compatible with a valuation in hyperfields and prove an analogue of the Baer-Krull theorem for hyperfields. In addition, we generalize several aspects of the theory of real hyperfields from the classical theory of ordered fields. For example, we introduce the notion of a real holomorphy hyperring and show that it is a Prüfer hyperring (which we also define in this thesis). Moreover, we define real places on hyperfields and show that the topological space of real places on hyperfields has properties analogous to those of the classical theory of ordered fields. However, some facts from the classical theory of real fields cannot be generalized to the theory of hyperfields. In this thesis, we give examples of such facts.

In 1983, Krasner presented the construction of a hyperfield, which is the quotient of a field by a multiplicative subgroup of that field. We call these hyperfields factor hyperfields. In this thesis, we study real factor hyperfields. For instance, we study the relation of a strict partial order associated with the positive cone of a hyperfield. In particular, we focus on elements that are not comparable. We show that each real factor hyperfield is a union of a chain of antichains and we determine the number of elements in each antichain. In addition, we show the relation between the positive cones in a field and the positive cones of a real factor hyperfield arising from that field.

24.04.24 Hanna Stojakowska

słowa kluczowe w języku polskim (odpowiedniki słów kluczowych w języku angielskim).

Hiperciało (hyperfield), hiperstruktury (hyperstructures), waluacja (valuation), stożek dodatni (positive cone), porządek (order)



Uniwersytet Szczeciński

Instytut Matematyki

mgr Hanna Stojalowska

Tytuł rozprawy doktorskiej: **Real hyperfields**

Promotor: **prof. dr hab. Franz-Viktor Kuhlmann**

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Hiperpola są uogólnieniem ciał, w których dodawanie jest wielowartościowe, a mnożenie jednowartościowe. Zostały wprowadzone przez Krasnera w 1956 roku. W 2006 roku Marshall wprowadził pojęcie hiperpola rzeczywistego. Mówimy, że hiperpola jest rzeczywiste, jeśli ma co najmniej jeden porządek. W niniejszej rozprawie rozwijamy teorię hiperpola rzeczywistych. Wprowadzamy pojęcie porządku zgodnego z waluacją w hiperpolach i udowadniamy analog twierdzenia Baera-Krulla dla hiperpola. Ponadto uogólniamy kilka aspektów teorii hiperpola rzeczywistych, pochodzących z klasycznej teorii ciał uporządkowanych. Na przykład, wprowadzamy pojęcie rzeczywistego hiperpola holomorficznego i pokazujemy, że jest to hiperpola Prufera (który również definiujemy w tej rozprawie). Co więcej, definiujemy punkty rzeczywiste na hiperpolach i pokazujemy, że przestrzeń topologiczna punktów rzeczywistych na hiperpolach ma własności analogiczne do tych z klasycznej teorii ciał uporządkowanych. Jednakże, niektóre fakty znane z klasycznej teorii ciał rzeczywistych nie mogą zostać uogólnione na teorię hiperpola. W niniejszej rozprawie podajemy przykłady takich faktów.

W 1983 roku Krasner przedstawił konstrukcję hiperpola, które jest ilorzem ciała przez multiplikatywną podgrupę tego ciała. Takie hiperpola nazywamy hiperpolami faktoryzowanymi. W niniejszej rozprawie badamy rzeczywiste hiperpola faktoryzowane. Między innymi, badamy relację ostrego, częściowego porządku związanego z porządkiem hiperpola. W szczególności skupiamy się na elementach, które nie są porównywalne. Pokazujemy, że każde rzeczywiste hiperpola faktoryzowane jest sumą mnogościową łańcucha antyłańcuchów i określamy liczbę elementów w każdym antyłańcuchu. Ponadto pokazujemy związek między porządkami w ciele i porządkami rzeczywistego hiperpola faktoryzowanego, powstałego z tego ciała.

24.04.24 Hanna Stojalowska

słowa kluczowe w języku polskim (odpowiedniki słów kluczowych w języku angielskim).

Hiperpola (hyperfield), hiperstruktury (hyperstructures), waluacja (valuation), stożek dodatni (positive cone), porządek (order)

SEKCJA DS. NAUKI

24.04.2024

W P Ł Y N Ę Ł O