Prof. dr hab. Wojciech Kucharz
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński

25.05.2024

Recenzja rozprawy doktorskiej

Pani mgr Hanny Weroniki Stojałowskiej

Tytuł rozprawy doktorskiej: Real hyperfields (Hiperciała rzeczywiste)

Promotor: prof. dr hab. Franz-Viktor Kuhlmann

Rozprawa doktorska Pani mgr Hanny Stojałowskiej napisana jest w języku angielskim. Składa się ona z czterech rozdziałów i zawiera prawie sto stron tekstu matematycznego. Poniżej omawiam najpierw zawartość każdego z pierwszych trzech rozdziałów.

Rozdział 1: Hypercompositional algebraic structures

W tym rozdziale przypomniane są najważniejsze definicje i ustalona jest terminologia. Bardzo dobrze, że Autorka umieściła ten rozdział, ponieważ ułatwia on lekturę całej rozprawy. Prezentacja materiału jest dobrze przemyślana.

W podrozdziale 1.1 przypomniane są dwie równoważne definicje grupy. Pierwsza z nich, Definicja 1.1.1, jest standardowa, natomiast druga, Definicja 1.1.2, umożliwia w sposób naturalny wprowadzić pojęcie hipergrupy. Zgodnie z pracą Marty [31] (Definicja 1.1.5 w rozprawie doktorskiej), hipergrupa G jest niepustym zbiorem wyposażonym w hiperoperację

$$+: G\text{x}G \to P^*(G),$$

gdzie $P^*(G)$ jest rodziną wszystkich niepustych podzbiorów G, spełniającą dwa warunki analogiczne do warunków w Definicji 1.1.2. Inaczej mówiąc, pojęcie hipergrupy jest uogólnieniem pojęcia grupy, przy czym jednowartościowa operacja w grupie zastąpiona jest przez operację wielowartościową. W ocenianej rozprawie doktorskiej ważną rolę odgrywają specjalne hipergrupy, tzw. hipergrupy kanoniczne (Definicja 1.1.7). Każda grupa abelowa G może być traktowana jako hipergrupa kanoniczna, gdzie wynik operacji grupowej x+y identyfikujemy ze zbiorem jednoelementowym $\{x+y\}$. W Przykładzie 1.1.11 występuje wiele interesujących hipergrup kanonicznych.

W podrozdziale 1.2 wprowadzone są pojęcia hiperpierścienia i hiperciała. Hiperpierścień przemienny z jednością, oznaczany R, jest hipergrupą kanoniczną wyposażoną w jednowartościowe mnożenie przemienne z jednością, z pewnymi warunkami łączącymi hiperoperację dodawania z operacją mnożenia. Dodatkowo, jeśli każdy niezerowy element R ma element odwrotny ze względu na mnożenie, to R nazywa się hiperciałem. Twierdzenie 1.2.5, pochodzące z pracy M. Krasnera [23], podaje konstrukcję hiperpierścienia skojarzonego z pierścieniem przemiennym R i podgrupą T jego semigrupy z mnożeniem złożonej z elementów odwracalnych. Hiperpierscień otrzymany w wyniku tej konstrukcji jest oznaczany przez R_T ; jeśli R jest ciałem, to R_T jest hiperciałem. Hiperpierścienie i hiperciała postaci R_T są nazywane faktor hiperpierścieniami i faktor hiperciałami. W Przykładzie 1.2.11 znajduje się interesujący przykład hiperciała Manssourosa pochodzący z pracy [32]. Autorka rozprawy podaje w Stwierdzeniu 1.2.12 dowód faktu, że hiperciało

Manssourosa nie jest faktor hiperciałem, wypełniając w ten sposób lukę w oryginalnym dowodzie z [32].

W podrozdziale 1.3 omówione są podstawy teorii hiperpierścieni. Wprowadzone są pojęcia podhiperpierścienia, homomorfizmu hiperpierścieni, hiperideału, hiperpierścienia ilorazowego, hiperpierścienia ułamków oraz lokalizacji. Wszystkie te pojęcia są naturalnymi uogólnieniami odpowiednich pojęć dotyczących klasycznej teorii pierścieni, lecz konieczne jest przypomnienie precyzyjnych definicji w kategorii hiperpierścieni i podanie dowodów wielu faktów.

Rozdział 2: Real hyperfields

Klasyczna teoria ciał uporządkowanych, pochodząca od Artina i Schreiera [2] oraz rozwinięta w wielu późniejszych pracach i monografiach, doprowadziła do spektakularnych wyników. Nic więc dziwnego, że podjęte zostały próby przeniesienia tej teorii na hiperciała. Fundamentalne wyniki w tym zakresie znajdują się w pracy Marshalla [34]. Są one również przypomniane w omawianej rozprawie doktorskiej. Dla dowolnego hiperciała F mamy pojęcie dodatniego stożka, przeniesione z klasycznej teorii ciał. Hiperciało jest nazywane hiperciałem rzeczywistym, jeśli zawiera ono co najmniej jeden stożek dodatni. Rodzina wszystkich stożków dodatnich hiperciała F oznaczana jest przez $X(F)$. W kategorii hiperciał Marshall uzyskał piękne odpowiedniki wyników Artina-Schreiera:

(1) Hiperciało F jest hiperciałem rzeczywistym wtedy i tylko wtedy , gdy -1 nie należy do sumy $\Sigma(F^*)^2$.
(2) Jeśli F jest hiperciałem rzeczywistym, to $\Sigma(F^*)^2$ jest przecięciem wszystkich stożków dodatnich hiperciała F.

Wyniki te są podane wraz z dowodami jako Twierdzenie 2.1.13 i Wniosek 2.1.17 w omawianej rozprawie doktorskiej. Ponadto, wynik z pracy Marshalla [34] o tym, że dla dowolnego hiperciała rzeczywistego F zbiór $X(F)$ jest topologiczną przestrzenią boolowską jest przedstawiony z dowodem jako Twierdzenie 2.1.20. W podrozdziale 2.1 znajduje się również interesująca charakteryzacja hiperciał rzeczywistych, Stwierdzenie 2.1.18, pochodząca z pracy [26], której współautorką jest Pani mgr Hanna Stojałowska: hiperciało F jest hiperciałem rzeczywistym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nietrywialny homomorfizm z F do tzw. hiperciała znaków.

W podrozdziale 2.2 znajdujemy dodatkowe interesujące wyniki dotyczące faktor hiperciał. Zgodnie z Twierdzeniem 2.2.2, jeśli K jest ciałem rzeczywistym i $T \subset K^*$, to istnieje bijekcja między zbiorem $X(K_T)$ i zbiorem $X(K|T)$, gdzie $X(K|T)$ jest zbiorem wszystkich dodatnich stożków ciała K zawierających T. Jako konsekwencję otrzymuje się Wniosek 2.2.3 (Twierdzenie 3.4 z [26]):

$$|X(K_T)| = |X(K|T)|.$$

Rozdział 3: Valued hyperfields

Autorka rozprawy podaje definicję waluacji hiperciała zgodną z definicjami podanymi w [11] i [26]. Waluacje określone na hiperciałach mają wartości w uporządkowanej grupie abelowej (oczywiście wartość ∞ jest również dopuszczalna). Wiele faktów w tym rozdziale pochodzi z pracy [26]: Lemat 3.1.2, Definicja 3.1.6, Stwierdzenie 3.1.7, Lemat 3.1.8, Definicja 3.1.9, Stwierdzenie 3.1.10, Stwierdzenie 3.1.11, Lemat 3.1.12, Przykład 3.2.4. Np. zgodnie ze Stwierdzeniem 3.1.10, jeśli F jest hiperciałem i v jest waluacją na F, to $\mathcal{O}_v := \{x \in F : v(x) \geq 0\}$ jest hiperpierścieniem waluacji hiperciała F, a $\mathfrak{m}_v := \{x \in F : v(x) > 0\}$ jest jedynym hiperideałem maksymalnym w $\mathcal{O}_v$.

Pora przejść do rozdziału 4, który zawiera główne, oryginalne wyniki rozprawy doktorskiej.

Rozdział 4: Real valuations, real places and real holomorphy hyperrings

Wiele wyników znajdujących się w tym rozdziale pochodzi z pracy [26],

K. Kuhlmann, A. Linzi, H. Stojałowska, Orderings and valuations in hyperfields, Journal of Algebra 611 (2022), 399-421.

Przedstawię jedynie dwa takie wyniki. W tym celu wprowadzamy pewne oznaczenia.
Niech F będzie hipercialem i niech P będzie stożkiem dodatnim. Definiujemy

$$I_n := 1 + \ldots + 1 \; (n \text{ składników})$$

$$A(P) := \{a \in F\colon (I_n \pm a) \cap P \neq \emptyset \text{ dla pewnej liczby naturalnej } n\}$$

$$I(P) := \{ a \in F\colon 1 \pm I_n \cdot a \subseteq P \text{ dla wszystkich liczb naturalnych } n\}.$$

Stwierdzenie 4.1.3. Niech F będzie hipercialem rzeczywistym i niech P będzie stożkiem dodatnim. Wtedy $A(P)$ jest hiperpierścieniem waluacji w F z jedynym hiperideałem maksymalnym $I(P)$. Ponadto, $I_n(P) \subseteq A(P)$ dla każdej liczby naturalnej n.

Następujący piękny wynik jest bez wątpienia znaczącym osiągnięciem.

Twierdzenie 4.1.23 (Twierdzenie Baera-Krulla dla hiperciał rzeczywistych). Niech F będzie hipercialem rzeczywistym i niech v będzie waluacją na F z grupą waluacji Γ. Wtedy istnieje bijekcja między zbiorem $X(F,v)$ i zbiorem $X(\overline{F})$ x Hom (Γ, {-1, 1}).

W twierdzeniu powyżej, $X(F,v)$ oznacza zbiór wszystkich stożków dodatnich w F zgodnych z waluacją v,

$$X(P,v) := \{P \in X(F)\colon A(P) \subseteq \mathcal{O}_v\},$$

oraz $\overline{F} := \mathcal{O}_v / \mathcal{M}_v$.

Mocno rozbudowany jest podrozdział 4.2 poświęcony badaniu relacji porządku skojarzonej z dodatnim stożkiem. Zawiera on liczne interesujące własności i przykłady.

W podrozdziale 4.3 badany jest rzeczywisty hiperpierścień holomorficzności Hol(F) hiperciała rzeczywistego F. Jeśli $R(F)$ jest zbiorem wszystkich rzeczywistych waluacji F, to Hol(F) jest określony jako przecięcie wszystkich hiperpierścieni waluacji odpowiadających elementom z $R(F)$. Okazuje się, że Hol(F) jest również przecięciem wszystkich hiperpierścieni postaci $A(P)$, gdzie jest stożkiem dodatnim w F. Autorka rozprawy udowodniła następujący elegancki i ciekawy wynik.

Twierdzenie 4.3.5. Hiperpierścień Hol(F) jest hiperpierścieniem Prüfera.

Rozprawę kończy podrozdział 4.4, w którym badane są punkty rzeczywiste w hiperciałach.

Uwagi ogóle. Rozprawa doktorska Pani mgr Hanny Stojałowskiej jest napisana bardzo starannie. Odwołania do literatury są prawidłowe i uwzględniają istotne artykuły dotyczące hiperpierścieni i hiperciał, w tym dwie prace [20] i [26], których Hanna Stojałowska jest współautorką. W pracach matematycznych obowiązuje tradycyjna zasada proporcjonalnego udziału wszystkich autorów.

Konkluzja. Oceniana rozprawa doktorska zawiera znaczące wyniki matematyczne w zakresie algebry. Badanie hiperpierścieni i hiperciał stanowi atrakcyjny program, wymagający biegłości w posługiwaniu się wieloma narzędziami algebry. Przeniesienie znanych wyników z teorii pierścieni i teorii ciał na przypadek hiperpierścieni i hiperciał nie odbywa się w sposób automatyczny, lecz wymaga głębokiego wniknięcia w istotę problemów. Nie widzę słabych punktów, z wyjątkiem braku samodzielnych publikacji Autorki. **W mojej ocenie rozprawa doktorska Pani mgr Hanny Stojałowskiej spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymogi dotyczące oryginalności i zakresu prowadzonych badań. Wnoszę o przyznanie Pani mgr Hannie Stojałowskiej stopnia doktora nauk matematycznych.**

Wojciech Kucharz

Wojciech Kucharz

Profesor Matematyki