Recenzja pracy doktorskiej
Real hyperfields
przedstawionej przez mgr Hannę Stojałowską

Praca doktorska dotyczy teorii hiperciał rzeczywistych (z waluacją). Pojęcie hiperciała uogólnia pojęcie ciała poprzez dopuszczenie jako wartości dodawania niepustych zbiorów, które nie muszą być singletonami. Pojęcie to zostało wprowadzone przez Krasnera w 1957 roku w kontekście teorii waluacji.

Praca ta ma cztery rozdziały, które są omówione poniżej, gdzie również opisuję główne rezultaty pracy.

W rozdziale pierwszym znajduje się dokładny opis definicji i pojęć z „hiperalgebry", które są później potrzebne w pracy. Są to pojęcia takie jak: hipergrupa, hipergrupa kanoniczna, hiperpierścień, hiperciało i hiperciało ilorazowe w sensie Krasnera (iloraz ciała przez podgrupę grupy multyplikatywnej).

W drugim rozdziale autorka przedstawia teorię Marshalla hiperciał rzeczywistych ze szczególnym uwzględnieniem hiperciał rzeczywistych ilorazowych (w sensie Krasnera). W szczególności, podane są związki pomiędzy dodatnimi stożkami ciała a dodatnimi stożkami hiperciała ilorazowego.

W trzecim rozdziale opisane są podstawy teorii waluacji na hiperciałach (wprowadzonej wcześniej przez B. Davvaza i A. Salasiego), gdzie autorka skupia się na ilorazowych hiperciałach rzeczywistych. Pokazane są związki między waluacjami na ciele a waluacjami na odpowiednich rzeczywistych hiperciałach ilorazowych. Autorka wprowadza też swoje własne pojęcie hiperpierścienia Prüfera w analogii z pojęciem klasycznym (dziedzina w której skończenie generowane ideały są odwracalne).

Czwarty rozdział zawiera następujące główne rezultaty pracy.

- Wariant twierdzenia Baera-Krulla w kontekście hiperciał (Tw. 4.1.23).
- Każda rzeczywista struktura na hiperciele zadaje częściowy porządek, który jest "strict weak ordering", czyli relacja nieporównywalności jest relacją równoważności (Prop. 4.2.7). Hiperciało rzeczywiste jest sumą łańcucha antyłańcuchów względem tego porządku i długości tych antyłańcuchów są opisane w Prop. 4.2.36.
- Zdefiniowane jest pojęcie "real holomorphy hyperring" i pokazane jest, że te "real holomorphy hyperrings" są hiperpierścieniami Prüfera (Tw. 4.3.5).
- Udowodnione są własności topologiczne przestrzeni rzeczywistych „places" na rzeczywistych hiperciałach (Tw. 4.4.5).

Powyższe wyniki są zilustrowane ciekawymi przykładami hiperciał ilorazowych (w sensie Krasnera) ciał szeregów Lauranta i ciał szeregów Hahna nad ciałami uporządkowanymi (Przykłady 4.1.18 – 4.1.20).

Recenzowana rozprawa doktorska jest w większości dobrze napisana. Wciąż mam kilka sugestii i uwag, które zamieszczam poniżej.

(1) Przykład 1.2.9: Wszystko co jest tu napisane jest prawdą, ale wybór ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$ (jako $\mathbb{C}_{\mathbb{C}^*}$) dla opisu hiperciała dwuelementowego nie będącego ciałem jest nieco zmylający ponieważ to hiperciało może być przedstawione w postaci F_{F^*} dla *dowolnego* ciała F, takiego że $|F| > 2$.

(2) Prop. 1.2.12: Warto tu zaznaczyć, że istnieje inna (od konstrukcji Massourosa) konstrukcja hipercial, które nie są ilorazowe w sensie Krasnera. Konstrukcja ta pochodzi z pracy (Proposition 3.6 tamże):

Alain Connes, Caterina Consani. "The hyperring of adèle classes". *Journal of Number Theory*, 131(2):159–194, 2011.

Pokrótce, mamy że:

- u Massourosa zbiór $x + x$ jest *największy* możliwy ($H \setminus \{0\}$) oraz zbiór $x + y$ jest zwykle *najmniejszy* możliwy ($\{x, y\}$);
- natomiast w powyższej pracy zbiór $x + x$ jest *najmniejszy* możliwy ($\{x, 0\}$) oraz zbiór $x + y$ jest zwykle *największy* możliwy ($H \setminus \{x, y, 0\}$).

(3) Def. 1.3.1 i Def. 1.3.4: Pojęcie podstruktury powinno odpowiadać pojęciu homomorfizmu, w taki sposób że jeśli mamy dwie struktury $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, takie że uniwersum $\mathcal{M}$ jest podzbiorem uniwersum $\mathcal{N}$, to $\mathcal{M}$ jest podstrukturą $\mathcal{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy oczywista inkluzja jest homomorfizmem.

W sytuacji dwóch możliwości na zdefiniowanie podstruktury (Def. 1.3.1) i dwóch możliwości na zdefiniowanie homomorfizmu (Def. 1.3.4) mamy:

- pojęcie "strict subhyperring" odpowiada (w powyższym sensie) pojęciu "strict homomorphism";
- ale pojęcie "subhyperring" *nie odpowiada* (w powyższym sensie) pojęciu "homomorphism", ponieważ pojęcie "subhyperring" (z Def. 1.3.1) odpowiada silniejszej wersji własności (HH3) z Def. 1.3.4, gdzie:

$$\varphi(x +_R y) = (\varphi(x) +_S \varphi(y)) \cap \operatorname{im}(\varphi).$$

Uwaga ta nie wpływa na prawdziwość wyników w recenzowanej pracy, ale powoduje wrażenie (przynajmniej u mnie), że podstawowe definicje z teorii hipercial są nieco przypadkowe.

Przy okazji: role R i S są zamienione w definicjach 1.3.1 i 1.3.4, co jest pewną niezręcznością.

(4) Rozdział 3: W analogii do Prop. 1.2.12, naturalne wydaje się sformułowanie pytania:

„Czy każde hiperciało z waluacją pochodzi od ilorazowej konstrukcji Krasnera?"

Prawdopodobnie odpowiedź jest nieznana, ale powyższe pytanie jest warte sformułowania.

(5) Prop. 4.2.7.

(a) Częściowe porządki w których relacja nieporównywalności jest relacją równoważności mają swoją nazwę ("strict weak ordering"), o czym warto wspomnieć.

(b) Zamiast "$x + y \subset P$", powinno być "$x + y \subset P_0$".

(c) W dowodzie 4.2.7 część od "On the other hand" może być zastąpiona przez krótką uwagę w stylu:

"exchanging a with c in the argument above, we obtain $a \sim c$".

Chodzi o to, że jeśli pokazało się prawdziwość stwierdzenia typu:

$$\forall x, y, z\ \Upsilon(x, y, z),$$

to automatycznie pokazało się również prawdziwość stwierdzenia:

$$\forall x, y, z\ \Upsilon(z, y, x).$$

U nas $\Upsilon(x,y,z)$ to:

$$(y-x)\cap P_0 \neq \emptyset \quad \wedge \quad (z-y)\cap P_0 \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad (x-z)\cap P_0 \neq \emptyset.$$

(6) Prop. 4.2.17.: Wydaje się sensowne zastanowienie się nad tym, czy bycie "stringent" w pełni charakteryzuje te hiperciała rzeczywiste, dla których indukowany porządek częściowy jest liniowy.

Powyższe uwagi mają charakter drugorzędny i dlatego nie mają wpływu na ostateczną ocenę rozprawy (poniżej).

Konkluzja

Uważam, że ta rozprawa doktorska prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydatki w dyscyplinie matematyka oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Podsumowując, **przedstawiona rozprawa spełnia wymogi ustawowe (artykuł 187 ust. 1-3 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce) i wnoszę o jej przyjęcie oraz dopuszczenie mgr Hanny Stojałowskiej do dalszych etapów postępowania doktorskiego.**

Piotr Kowalski

Prof. dr hab. Piotr Kowalski
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego

Data sporządzenia recenzji: **28 maja 2024**