Ocena rozprawy doktorskiej mgr Hanny Weroniki Stojałowskiej „Real hyperfields"

Przedmiotem recenzowanej pracy jest opracowanie wersji klasycznego twierdzenia Baera-Krulla w wersji dla hipercial i rozwinięcie przy użyciu tak otrzymanych narzędzi terorii hipercial rzeczywistych. Przypomnijmy, że w klasycznej teorii ciał, ciało F nazwiemy uporządkowanym, gdy możemy wyposażyć je w relację częściowego porządku zgodną z działaniami algebraicznymi w F. Z praktycznego punktu widzenia wygodniej niż relacją częściowego porządku jest posługiwać się pojęciem nieujemnego stożka danego porządku, z zatem podzbioru P ciała F złożonego z nieujemnych elementów danej relacji - stożki takie zwyczajowo nazywamy porządkami. Klasyczne twierdzenie Artina-Schreiera z końca lat 20-tych XX wieku orzeka, że dane ciało F możemy wyposażyć w porządek, jeżeli -1 nie jest w nim sumą kwadratów. Dalej, waluację $v: F \to G \cup \{\infty\}$, gdzie G jest pewną uporządkowaną grupą abelową, nazwiemy kompatybilną względem danego porządku P ciała F, jeżeli dla dowolnych dodatnich w porządku P elementów a i b nierówność $v(a) \geqslant v(b)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $b - a \in P$. Zbiór wszystkich porządków ciała F kompatybilnych z waluacją v oznaczamy przez X_F^v, przy czym nie jest trudno wykazać, że dany porządek jest kompatybilny z waluacją v wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień waluacyjny $\mathcal{O}_v$ jest zbiorem wypukłym względem porządku P. Jeśli oznaczymy przez U^+ grupę dodatnich jednostek pierścienia $\mathcal{O}_v$, to porządki z X_F^v pozostają we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z charakterami $\chi: F^\times / F^{\times 2} U^+ \to \{-1, 1\}$ odwzorowującymi klasę -1 na -1.

Głównym celem, jaki postawiła sobie do zrealizowania Autorka, jest sformułowanie i udowodnienie wersji twierdzenia Baera-Krulla dla hipercial,czyli algebr przypominających ciała, w których wszelako dodawanie jest operacją wielowartościową. Zadanie to napotyka na istotne naturalne trudności, z racji których nie może być wykonane poprzez proste „przetłumaczenie" rozumowania dla ciał do przypadku algebr wielowartościowych: po pierwsze, prosta odpowiedniość między ścisłym porządkiem liniowym ciała a jego dodatnim stożkiem (tj. nieujemnym stożkiem z wyłączonym elementem 0) nie przenosi się na hiperciała, gdzie istnieją dodatnie stożki, którym nie odpowiadają liniowe porządki. W związku z tym, autorka zmuszona jest budować swoją konstrukcję w oparciu o ścisłe porządki częściowe. Po drugie, wspomniana wcześniej charakteryzacja porządków kompatybilnych z daną waluacją jako tych, względem których pierścień waluacyjny jest zbiorem wypukłym – również nie przenosi się do świata hipercial: tu, dla danego porządku kompatybilnego z waluacją, jej hiperpierścień waluacyjny jest wypukły względem ścisłego porządku częściowego wyznaczonego przez dodatni stożek porządku, ale implikacja odwrotna na ogół nie jest prawdziwa. Autorka proponuje zatem rozważanie pojęcia kompatybilności dodatnich stożków i waluacji definiowanego bez użycia wypukłości. Udowodnione przez Autorkę twierdzenie orzeka zatem, że dla hiperciała H dodatnie stożki kompatybilne z daną waluacją $v: H \to \Gamma \cup \{\infty\}$ pozostają we wzajemnie jednoznaczej odpowiedniości ze zbiorem $X_{\bar{H}} \times \mathrm{Hom}\{\Gamma, \{\pm 1\}\}$, gdzie $\bar{H}$ oznacza odpowiednio zdefiniowane hiperciało reszt waluacji v. Jest to bardzo elegancko sformułowany rezultat, który – w moim odczuciu – w najlepszy możliwy sposób przenosi twierdzenie Baera-Krulla do świata hipercial.

Hiperciała formalnie pojawiły się w algebrze w latach 30-tych XX wieku, aczkolwiek sam pomysł rozważania tworów „ciałopodobnych" z wielowartościowym dodawaniem jest zapewne o wiele starszy. W ostatnich latach można zaobserwować wzmożone zainteresowanie algebrami wielowartościowymi w ogólności, a hiperciałami w szczególności: interesujące przykłady ich zastosowań znajdujemy w geometrii tropikalnej, w informatyce teoretycznej i logice rozmytej, czy wreszcie w algebraicznej teorii form kwadratowych – istotnie, dla danego ciała F i jego grupy klas kwadratów $Q(F) = F^\times / F^{\times 2}$ można wprowadzić operację wielowartościowego dodawania elementów a, $b \in Q(F)$ poprzez zdefiniowanie sumy $a + b$ jako zbioru (klas) wartości formy kwadratowej $ax^2 + by^2$, określając w ten sposób na $Q(F)$ strukturę hiperciała. Hiperciało $Q(F)$ jest wygodnym obiektem do badania form kwadratowych z aksjomatycznego punktu widzenia, istotnie można więc rozważać hiperciała spełniające pewne dodatkowe aksjomaty odpowiadające własnościom ciała $Q(F)$ i nazywać je hiperciałami kwadrtatowymi. Kategoria hipercial kwadratowych to, w przybliżeniu, to samo, co kategoria grup specjalnych Dickmanna-Miraglii, czy kategoria abstrakcyjnych pierścieni Witta. Niedawno opublikowano sporo rezultatów (prace Dickmanna, Miraglii, Mariano, Roberto, Petrovicha i innych), w których z powodzeniem udało się przenieść wybrane klasyczne twierdzenia z teorii form kwadratowych do świata kwadratowych hipercial. Brak dobrze zachowującej się teorii waluacji stanowi tu poważny problem – przykładowo opracowany niedawno przez Mariano i Roberto dowód twierdzenia Arasona-Pfistera (tzw. Arason-Pfister Hauptsatz) starannie omija wszelkie nawiązania do teorii waluacji, tymczasem w przypadku ciał jest to przecież klasyczne twierdzenie „waluacyjne". Przeglądając bibliografię załączoną przez Autorkę do jej rozprawy odniosłem wrażenie, że nie jest zaznajomiona z akurat tym nurtem prowadzonych obecnie badań. Nie jest to, oczywiście, zarzut, ale raczej sugestia, gdzie opracowane przez nią wyniki mogłyby znaleźć naturalne i efektowne zastosowania.

Autorka podzieliła pracę na cztery rozdziały, przy czym najważniejsze rezultaty znajdują się w ostatnim z nich. Pierwszy rozdział ma charakter wprowadzający, gdzie Autorka podaje podstawowe definicje i twierdzenia z teorii hipergrup, hiperpierścieni i hiperciał. Wszystkie dyskutowane pojęcia są tu bogato ilustrowane przykładami, w tym z dziedzin dość odległych od głównej tematyki rozprawy. Autorka często też pozwala sobie na liczne dygresje luźno związane z głównym rezultatem pracy, na przykład przeprowadza dogłębną analizę przykładu Massourosa hiperciała, które nie jest ilorazem ciała. Uważam, że praca sporo na tym zyskuje: lektura monografii, której autor częstokroć pochyla się nad zagadnieniem, które z jakiegoś powodu go zaintryguje, sprawia czytelnikowi niewątpliwą przyjemność.

W drugim rozdziale Autorka streszcza główne rezultaty teorii rzeczywistych hiperciał, opierając się przede wszystkim na pracy Marshalla. Część twierdzeń jest tu nieznacznie przerobiona tak, aby miała zastosowanie do interesujących Autorkę stożków dodatnich, nie zaś stożków nieujemnych. W drugiej części rozdziału, przy omawianiu rzeczywistych hiperciał ilorazowych, pojawiają się też pierwsze oryginalne wyniki pochodzące z opublikowanej przez Autorkę wspólnej pracy z K. Kuhlmann i A. Linzim.

Trzeci rozdział poświęcony jest waluacjom na hiperciałach. Autorka opiera się tu na pojęciu waluacji hiperciała w sensie zdefiniowanym przez Davvaza i Salasi'ego jako waluacji o wartościach w uporządkowanej grupie abelowej, które, w szczególności, obejmuje też pojęcie waluacji o wartościach w uporządkowanej hipergrupie. Kluczowe wyniki tego rozdziału pochodzą ze wzmiankowanej już wspólnej pracy Autorki, K. Kuhlmann i A. Linziego, natomiast część pochodzi z pracy Mirdar Harijani i Anvariyeha, wszelako z poprawionymi lub ulepszonymi dowodami autorstwa Autorki i Linziego.

Centralne dla pracy twierdzenie znajduje się w ostatnim, czwartym rozdziale. Również i ono pochodzi ze wspólnej pracy Autorki, K. Kuhlmann i Linziego. W rozdziale podanych jest też kilka dodatkowych rezultatów, w szczególności Autorka podejmuje próbę zdefiniowania rzeczywistego hiperpierścienia holomorfii i pokazuje, że jest to hiperpierścień Prufera – otrzymuje w ten sposób analogon znanego twierdzenia z algebry rzeczywistej.

Praca napisana jest jasnym, czytelnym językiem i jest przyjemna w lekturze. Przedstawione przez Autorkę rozumowania są klarowne, a sposób redakcji dowodów twierdzeń świadczy o biegłości i doświadczeniu, jakimi Autorka legitymuje się w opracowywaniu tekstów matematycznych. Szczególnie godnym podkreślenia atutem pracy jest spora liczba dobre przemyślanych przykładów. Również angielszczyzna Autorki pozostaje bez zarzutu.

W rozprawie Autorka cytuje swoje trzy publikacje (z czego jedna przechodzi jeszcze proces wydawniczy), ale przeważająca większość odniesień dotyczy wspólnej pracy z K. Kuhlmann i A. Linzim. W istocie więc praca Autorki sprawia wrażenie – w zakresie kluczowych wyników – rozbudowanej wersji jednego artykułu. Należy jednak zaznaczyć, że jest to artykuł dość obszerny i opublikowany w dobrym czasopiśmie.

Odpowiedniość Baera-Krulla dla hiperciał jest, oczywiście, wynikiem ciekawym samym w sobie, uważam jednak, że Autorka mogłaby znakomicie rozreklamować swój wynik znajdując jakieś zastosowanie otrzymanego rezultatu do rozwiązania któregoś z typowych problemów „waluacyjnych" – wspominałem już wyżej o przykładowych otwartych zagadnieniach w aksjomatycznej teorii form kwadratowych, do których rozstrzygnięcia twierdzenia Autorki powinny się nadać.

Podsumowując, moja opinia na temat recenzowanej rozprawy jest pozytywna. Jak wykazałem powyżej, praca zawiera szereg istotnych wyników matematycznych. Stwierdzam zatem, że rozprawa doktorska mgr Hanny Weroniki Stojałowskiej „Real hyperfields" stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego w rozumieniu Art. 187, pkt 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce*. Rozprawa wskazuje na posiadanie przez Autorkę ogólnej wiedzy teoretycznej w dyscyplinie matematyka oraz umiejętność prowadzenia samodzielnej pracy naukowej. W opinii niżej podpisanego, rozprawa spełnia zwyczajowe i ustawowe wymogi stawiane pracom doktorskim. W związku z powyższym wnoszę o dopuszczenie mgr Hanny Weroniki Stojałowskiej do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

Katowice, 2 czerwca 2024

Paweł Gładki