Prof. dr hab. Jerzy Kaczorowski
Wydział Matematyki i Informatyki UAM

ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4,
61-614 Poznań,
tel. 61829-5308 fax 61829-5315,
e-mail: kjerzy@amu.edu.pl

Poznań, 23.12.2019.

RECENZJA
rozprawy doktorskiej mgr Karoliny Chałupki
pt. *Pewne równania diofantyczne typu Fermata i krzywe eliptyczne*

1 Treść rozprawy.

Rozprawa składa się z sześciu rozdziałów oraz dodatku zawierającego obliczenia numeryczne. Opatrzona jest wstępem oraz spisem cytowanej literatury.

Rozdział pierwszy to w większości przegląd znanych faktów i definicji dotyczących krzywych eliptycznych (wyróżnik, przewodnik, redukcja, model minimalny itp.) niezbędnych do sformułowania wyników w rodziałach następnych. Znajdujemy tam informacje na temat form modularnych, związanych z nimi reprentacji Galois oraz funkcji L, a także podstawowe fakty dotyczące aproksymacji diofantycznych. Celem tego rozdziału jest ułatwienie referencji oraz ustalenie symboliki i terminologii. W przypadku klasycznych faktów i definicji cytowane są standardowe monografie, w przypadku wyników bardziej specjalnych – prace oryginalne. Samodzielny wkład autorki jest widoczny w paragrafach 1.1.3 oraz 1.3.5 gdzie wyznaczono explicite podstawowe parametry krzywych eliptycznych specjalnego typu oraz odpowiadających im reprezentacji Galois.

Właściwą treść pracy stanowią rozdziały 2–6. Rozważa się w nich równania diofantyczne następujących typów:

(i)

$$x^p + q^\alpha y^p = Cz^3,$$

gdzie p i q są liczbami pierwszymi, natomiast $\alpha \geqslant 0$ i $C \neq 0$ – liczbami całkowitymi (Rozdział 2);

(ii)

$$(x + Ay)(x + By)(x + Cy) = Dz^p,$$

gdzie p jest liczbą pierwszą, A, B i C są kolejnymi liczbami pierwszymi, a D liczbą całkowitą niepodzielną przez p-tą potęgę liczby pierwszej (Rozdział 3);

(iii)

$$(x + y)(x^2 + Bxy + y^2) = Dz^p,$$

gdzie $p \geqslant 7$ jest liczą pierwszą, a $B \neq \pm 2$ i $D \neq 0$ – liczbami całkowitymi (Rozdziały 4 i 6).

Udowodniono w nich, że dla odpowiednich wartości parametrów wspomniane równania nie mają nietrywialnych rozwiązań pierwotnych lub że rozwiązań tych jest „mało".

Rozdział 5 zawiera rezultaty pomocnicze dotyczące istnienia krzywych eliptycznych o przewodnikach szczególnej postaci. Zasadniczym wynikiem udowodnionym w Rozdziale 6 jest stwierdzenie, że zbiór liczb pierwszych q, dla których istnieje krzywa eliptyczna o przewodniku $N = 2^\alpha q$, gdzie $4 \leqslant \alpha \leqslant 7$ lub $N = 3 \cdot 2^\alpha q$, gdzie $\alpha \in \{4, 6, 7\}$, posiadająca punkt wymierny rzędu 2, ma zerową gęstość w zbiorze wszystkich liczb pierwszych.

2 Merytoryczna ocena rozprawy.

Należy zacząć od stwierdzenia, że rozprawa doktorska mgr Karoliny Chałupki nawiązuje do klasycznych, a jednocześnie bardzo aktualnych zgadnień teorii liczb. Dzięki pracom wielu wybitnych matematyków w tematyce tej osiągnięto w ostatnich dziesięcioleciach przełomowe rezultaty z dowodem Wielkego Twierdzenia Fermata na czele.

Recenzowana rozprawa ma zarówno silne jak i słabe strony. Do tych pierwszych zaliczam dobre opanowanie przez doktorantkę techniki dowodowej, zrozumienie użytych tam metod, dobrą orientację w literaturze przedmiotu oraz umiejętność wykorzystania ogólnych twierdzeń w konkretnych sytuacjach. Godna podkreślenia jest również umiejętność przeprowadzenia przez autorkę obliczeń numerycznych przy wykorzystaniu systemu Magma.

Sabą stroną rozprawy jest ograniczona oryginalność własnych pomysłów doktorantki. Jej wkład ogranicza się w zasadzie do adaptacji metod i wyników innych autorów. Chodzi tu o „dopasowanie" założeń o rozważanych równaniach diofantycznych w taki sposób, aby można je było zastosować w rozważanych przypadkach. Na przykład w dowodach Twierdzeń 2.1 i 2.3 stosuje się wyniki Bennetta-Vatsala-Yazdani, Wilesa, Ribeta, Deligne'a, Martina, Krausa-Oesterlé, Halberstadta-Krausa oraz Darmona-Merela. Autorka ogranicza się do kompilacji tych głębokich wyników. Dowód Twierdzenia 3.2 polega na dość elementarnej redukcji rozważanego przez Autorkę równania $(x+Ay)(x+By)(x+Cy) = z^p$ do równań rozpatrywanych przez Ribeta oraz Darmona-Merela i skorzystania z ich wyników. Z podobną sytuacją spotykamy się w dalszych częściach rozprawy. Czytając można czuć pewien niedosyt brakiem naprawdę głębokich i nowych rezultatów dotyczących np. reprezentacji Galois lub form modularnych stowarzyszonych z krzywymi eliptycznymi.

Dowody głównych twierdzeń są w istocie powtarzaniem w różnych wariantach schematu prowadzącego do dowodu Wielkigo Twierdzenia Fermata: istnienie rozwiązania równania diofantycznego pewnego typu pozwala na zdefiniowanie krzywej eliptycznej i co za tym idzie reprezentacji Galois i formy parabolicznej o niemożliwych do spełnienia własnościach. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że wyjściowe równanie nie może mieć rozwiązań. To piękna i owocna idea. Jest więc naturalnym pytanie o granice stosowalności tej metody. W tym sensie główne wyniki rozprawy wpisują się w aktualny i ważny nurt badań. Sformułowane powyżej słowa krytyki nie przekreślają wartości rozprawy, lecz plasują ją na konkretnym poziome. Jest on w zupełności wystarczający dla pozytywnej oceny, ale nie pozwala na wyróżnienie. Warto tutaj zauważyć, że rozprawa dotyczy zagadnień subtelnych i wysoce nietrywialnych, a dokonanie postępu w tej dziedzinie polegającego na opracowaniu istotnie nowych metod jest zadaniem niezwykle trudnym.

Tak więc mimo zatrzeżeń rozprawa robi pozytywne wrażenie, dowodzi dobrej orientacji autorki w trudnej tematyce oraz jej umiejętności w prowadzeniu subtelnych rozumowań. Należy przy tym podkreślić, że wspominane „dopasowanie" założeń nie było natychmiastowe, a także wymagało biegłości w wykonywaniu obliczeń numerycznych.

Redakcja pracy jest staranna z wyraźną dbałością o niezbędne szczegóły. Na ogół czytelnik jest umiejętnie prowadzony przez kolejne etapy rozumowań. W kilku występujących w rozprawie wyjątkach od tej reguły można z kontekstu odczytać intencje autorki i prawidłowo zinterpretować tekst pracy. Dla przykładu na stronie 80. czytamy, że wykładnik rozważanej w tym miejscu potęgi dwójki jest ograniczony przez $f(X)$. Może to prowadzić do nieporozumień, gdyż na poprzedniej stronie symbolem f oznaczono formę modularną stowarzyszoną z rozpatrywanym równaniem, natomiast – rzecz jasna – chodzi tu o funkcję f zdefiniowaną na stronie 63 (a więc 17 stron wcześniej w poprzednim rozdziale). Sformułowania twierdzeń są jasne i nie budzą zastrzeżeń. Ale i tu można mieć pewne uwagi. Dla przykładu, w tezie Twierdzenia 6.1 mówi się, że zbiór S ma zerową gęstość w zbiorze liczb pierwszych. Jednak przytoczony dowód daje znacznie silniejsze stwierdzenie, a mianowicie, że liczba liczb zbioru S nieprzekraczających x jest dla dużych x rzędu $O(\sqrt{x}\log^2 x)$. Tak więc bez żadnych zmian w dowodzie można tezę Twierdzenia 6.1 wzmocnić zastępując $o(\pi(X))$ przez $O(\sqrt{x}\log^2 x)$. Nieznacznie modyfikując dowód (nie rezygnując z założenia pierwszości q i stosując klasyczne oszacowania sitowe) można oszacowanie jeszcze bardziej wzmocnić pozbywając się jednego czynnika logarytmicznego. Są to uwagi dotyczące redakcji pracy nie wpływające na jej poprawność merytoryczną.

3 Konkluzja.

Biorąc po uwagę przytoczone wyżej argumenty oraz ważąc silne i słabe strony rozprawy doktorskiej Pani magister Karoliny Chałupki stwierdzam, że spełnia ona merytoryczne i zwyczajowe kryteria stawiane rozprawom na stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki i w związku z tym wnoszę o dopuszczenie doktorantki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.