28.08.2019

autor: Karolina Chałupka
tytuł: Pewne równania diofantyczne typu Fermata i krzywe eliptyczne
promotor: Prof. Andrzej Dąbrowski

STRESZCZENIE

W niniejszej pracy rozważamy pewne równania diofantyczne typu Fermata, dla których stosując techniki oparte na krzywych eliptycznych, formach modularnych i reprezentacjach Galois wnioskujemy nieistnienie nietrywialnych rozwiązań pierwotnych.

W rozdziale 2 dowodzimy, że równanie $x^n + y^n = Cz^3$, gdzie $3 \nmid \mathrm{ord}_3(C)$, ma skończenie wiele nietrywialnych rozwiązań pierwotnych (x, y, z) dla $n \geq 2$. Podajemy również warunki na współczynniki równania $x^n + q^\alpha y^n = Cz^3$ (n liczba pierwsza), przy których nie ma ono nietrywialnych rozwiązań pierwotnych.

W rozdziale 3 pokazujemy, że równanie $(x + Ay)(x + By)(x + Cy) = q^\alpha z^p$, gdzie $q \neq 2^n \pm 1$, p są liczbami pierwszymi i A, B, C kolejnymi liczbami całkowitymi, nie ma nietrywialnego rozwiązania pierwotnego dla $\alpha = 0$ i $p > 5$, a także dla $\alpha > 0$ i $p > q^{2q}$.

Kolejne trzy rozdziały poświęcone są równaniu postaci $(x+y)(x^2+Bxy+y^2) = Dz^p$, gdzie $p \geq 7$ jest liczbą pierwszą, $B \in \{0, 1, 3, 4, 5, 6\}$ i $D \neq 0$ jest liczbą całkowitą. W rozdziale 4 formułujemy kryteria, podające warunek dostateczny na to, aby dla ustalonego wykładnika p równanie to nie miało nietrywialnego rozwiązania pierwotnego. Kryteria te stosujemy dla $p < 10^6$ i wybranych wartości D. Szczegóły obliczeń znajdują się w dodatku A.

W rozdziale 5 klasyfikujemy liczby pierwsze $q \geq 5$, dla których istnieje krzywa eliptyczna nad $\mathbb{Q}$ o przewodniku $16q, 48q, 64q, 128q, 192q$ lub $384q$ z punktem wymiernym rzędu 2. Rezultaty te stosujemy w rozdziale 6, aby pokazać, że dla „prawie wszystkich" liczb pierwszych q i $D = q^\alpha$ $(p \nmid \alpha)$ powyższe równanie ma skończenie wiele nietrywialnych rozwiązań pierwotnych.