Poznań 16 października 2018

Grzegorz Banaszak
Profesor zwyczajny
Wydział Matematyki i Informatyki
UAM Poznań

Recenzja rozprawy doktorskiej
magistra Wojciecha Bondarewicza

Mgr Wojciech Bondarewicz jest asystentem na wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Szczecińskiego. Pod kierunkiem prof. dr hab. Piotra Krasonia napisał rozprawę doktorską pt. *Przeszkody do działania zasady lokalno-globalnej w grupach Mordella-Weila*. W swojej rozprawie zajmuje się zasadą lokalno-globalną dla modułów Drinfelda. Głównym rezultatem rozprawy jest Tw. 5.1 które podaje warunki na istnienie zasady lokalno-globalnej dla grup Mordella-Weila modułów Drinfelda. To twierdzenie jest analogiem odpowiedniego twierdzenia dla rozmaitości abelowych które udowodniliśmy wspólnie z Piotrem Krasoniem w pracy *On arithmetic in Mordell-Weil groups*, Acta Arithmetica 150, no 4, (2011), 315-337. Trzeba jednak pamiętać, że są fundamentalne różnice pomiędzy rozmaitościami abelowymi a modułami Drinfelda. Dla przykładu grupa Mordella-Weila rozmaitości abelowej jest skończenie generowana a to nie zachodzi dla modułów Drinfelda. Bardzo istotnym wynikiem który prowadzi do dowodu Twierdzenia 5.1 są twierdzenia o redukcji dla modułów Drinfelda (Twierdzenia 4.2 i 4.3) udowodnione w rozdziale 4. Aby sformułować i udowodnić Twierdzenia 4.2, 4.3 i 5.1 oraz przedstawić te wyniki w zwartej i zrozumiałej dla czytelnika formie, Wojciech Bondarewicz musiał szeroko omówić wyniki dotyczące modułów Drinfelda i innych rozdziałów arytmetycznej geometrii algebraicznej, które leżą u podstaw metody rozwiązania problemu lokalno-globalnej zasady w tym kontekście.

Praca doktorska składa się z sześciu rozdziałów. Poniżej omówię krótko zawartość poszczególnych rozdziałów.

Rozdział 1 to obszerny opis wcześniejszych rezultatów, otrzymanych przez wielu autorów, dotyczących zasady lokalno-globalnej dla rozmaitości abelowych, semi-abelowych, afinicznych grup algebraicznych, K-teorii étalnej itd. W. Bondarewicz cytuje również jeden wynik dotyczący pewnej szczególnej zasady lokalno-globalnej dla modułów Drinfelda. W końcu tego rozdziału sformułowane zostały główne twierdzenia rozprawy doktorskiej.

W rozdziale 2 W. Bondarewicz przypomina podstawowe rezultaty o modułach nad algebrami półprostymi na podstawie wspomnianej powyżej pracy *On arithmetic in Mordell-Weil groups*, Acta Arithmetica 150, które będą wykorzystane w jednym z kluczowych argumentów w dowodzie Tw. 5.1, podnosząc obliczenia nad ciałem $F = \mathbb{F}_q(t)$ do obliczeń nad algebrą półprostą $\mathbb{D} := \prod_{i=1}^{t} M_{e_i}(F)$.

Rozdział 3, to zwięzłe wprowadzenie do modułów Drinfelda i przedstawienie najważniejszych rezultatów które będą wykorzystane w dowodach Twierdzeń 4.2, 4.3 i 5.1. W. Bondarewicz opisuje też przekształcenia redukcji na modułach Drinfelda. Dzięki tym przekształceniom można sformułować zasadę lokalno-globalną. W końcu rozdziału omówione zostały również t-moduły i t-motywy.

Rozdziały 4 i 5 zawierają główne wyniki rozprawy i ich dowody. I tak w rozdziale 4, na bazie teorii Kummera dla modułów Drinfelda, W. Bondarewicz dowodzi wspomniane powyżej twierdzenia o redukcji (Tw. 4.2 i 4.3) które są jednym z głównych narzędzi w dowodzie głównego twierdzenia pracy (Tw. 5.1). Twierdzenie o redukcji (Tw. 4.2) jest dowodzone w kilku krokach na bazie wielu znanych rezultatów. Tw. 4.3 jest równoważne Tw. 4.2. Główne twierdzenie rozprawy Tw. 5.1 posiada dość długi, skomplikowany dowód wymagający wielu technicznych umiejętności w posługiwaniu sie rozległym aparatem arytmetycznej geometrii algebraicznej w terminach modułów Drinfelda. Tutaj wykorzystuje się wszystkie omówione wcześniej rezultaty i twierdzenia zawarte w rozprawie. W końcu rozdziału 5, W. Bondarewicz podaje również kontrprzykład dla zasady lokalno-globalnej w przypadku gdy główne numeryczne założenie w Tw. 5.1 nie jest spełnione.

Rozdział 6 dotyczy dynamicznych zasad lokalno-globalnych dla modułów Drinfelda. Wojciech Bondarewicz formułuje twierdzenia analogiczne do twierdzeń udowodnionych przez Stefana Barańczuka dla abelowych rozmaitości. Nie przeprowadza pełnych dowodów ponieważ są analogiczne do dowodów w pracach Stefana Barańczuka, natomiast zaznacza jakich modyfikacji trzeba dokonać, aby udowodnić twierdzenia, które sformułował dla modułów Drinfelda.

Wyniki zawarte w rozprawie doktorskiej są bardzo wartościowe. Ich dowody są technicznie zaawansowane i wymagają od autora dużych umiejętności w arytmetycznej geometrii algebraicznej, które zdobył we współpracy z promotorem prof. dr hab. Piotrem Krasoniem. Wojciech Bondarewicz pokazał, że potrafi bardzo dobrze posługiwać się wynikami teorii modułów Drinfelda, aby rozwiązać postawione zadania. Praca zawiera pewną liczbę misprintów, ale ogólnie rzecz biorąc jest to ładnie napisana praca doktorska. Te misprinty nie mają wpływu na wyniki rozprawy doktorskiej. Listę misprintów zamieszczam poniżej recenzji. Podsumowując, praca doktorska Wojciecha Bondarewicza spełnia wszystkie wymagania stawiane do uzyskania stopnia doktora nauk matematycznych.

Grzegorz Banaszak

G. B

Lista misprintów

1. Str. 35, linia 7+ $\mathcal{O}_L$ zamiast $\mathcal{O}$.

2. Str. 36, linia 7+ "definiujemy" zamiast "mamy"

3. Str. 36, linia 11- $L[t,\tau]$ zamiast $L[T,\tau]$

4. Str. 39, linia 2- K zamiast F

5. Str. 40, linia 2+ $\phi[I]^s$ zamiast $\phi[I]$

6. Str. 41, linia 1- Na prawej stronie formuły brakuje ewaluacji na σ

7. Str. 44, linia 6- Brakuje symbolu ciała bazowego nad którym jest rozpatrywana grupa Galois