Piotr Pragacz
profesor
Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej

magistra Wojciecha Bondarewicza

Rozprawa ta została napisana pod kierunkiem dr hab. Prof. US Piotra Krasonia i nosi tytuł:

**Przeszkody do działania zasady lokalno-globalnej
w grupach Mordella-Weila**

Celem rozprawy jest studiowanie warunku dostatecznego dla obowiązywania zasady lokalno-globalnej dla pewnej podkategorii t-modułów Andersona składającej się z t-modułów będących produktami modułów Drinfelda.

Rozprawa ta wpisuje się w większy program badań prowadzonych głównie przez G. Banaszaka i P. Krasonia oraz ich studentów, polegający na studiowaniu zasady lokalno- globalnej w rozmaitych kategoriach algebraicznych, obejmujących rozmaitości abelowe nad różnymi ciałami (Banaszak-Krasoń, Rzonsowski) oraz rozmaitości semiabelowe (Blinkiewicz). W skład zasady lokalno-globalnej wchodzi Problem nośnika oraz Problem liniowej zależności w grupach Mordella-Weila. Problem badania liniowej zależności dla rozmaitości abelowych został sformułowany w roku 2002 przez Gajdę.

Niech A będzie rozmaitością abelową nad ciałem F. Niech P będzie punktem w grupie Mordella-Weila $A(F)$ oraz Λ będzie podgrupą grupy $A(F)$. Załóżmy, że dla prawie wszystkich ideałów pierwszych v w O_F mamy $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$.
Czy implikuje to $P \in \Lambda$? (Skrót $r_v(-)$ oznacza standardową redukcję).

Zacznijmy od definicji modułów Drinfelda, które są głównym przedmiotem tej rozprawy. Wymaga to wprowadzenia pewnych oznaczeń.

Niech $\mathbb{F}_q$ będzie skończonym ciałem o $q = p^m$ elementach, F ciałem o stopniu przestępności 1 nad $\mathbb{F}_q$ i $A = \mathbb{F}_q[t]$. Niech K będzie skończenie generowanym ciałem nad $\mathbb{F}_q$. Pierścień $\mathbb{F}_q$-liniowych endomorfizmów $End_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{G}_{a,K})$ addytywnej grupy algebraicznej nad K jest pierścieniem $K\{\tau\}$. Endomorfizm τ odpowiada $u \to u^q$ z relacją $\tau u = u^q \tau$, $u \in K$.

Ciało K wraz z homomorfizmem $\iota : A \to K$ nazywamy A-ciałem. Jądro ι jest ideałem pierwszym $\mathcal{P}$, który nazywamy charakterystyką A-ciała K. Jeśli $\mathcal{P} = 0$, to mówimy, że K ma charakterystykę generyczną, a gdy $\mathcal{P} \neq 0$, K ma charakterystykę skończoną.

Niech $f(\tau) = \sum_{i=0}^{n} a_i \tau^i$ i zdefiniujmy $D : K\{\tau\} \to K, D(f) = a_0$. Jest to homomorfizm $\mathbb{F}_q$-algebr.

Niech $\phi : A \; K\{\tau\}$ będzie homomorfizmem $\mathbb{F}_q$-algebr. Wówczas ϕ nazywamy *modułem Drinfelda* nad K, gdy:

1. $D \circ \phi = \iota$;
2. Istnieje $a \in A$ takie, że $\phi_a := \phi(a) \neq \iota(a)\tau^0$.

Niech ϕ, ψ będą dwoma modułami Drinfelda nad K. Morfizmem z ϕ do ψ nazywamy wielomian $f \in K\{\tau\}$ taki, że $f\phi_a = \psi_a f$ dla każdego $a \in A$. Niezerowy morfizm nazywamy izogenią.

Moduły Drinfelda tworzą interesującą kategorię, która jest wszechstronnie badana we współczesnej algebraicznej geometrii arytmetycznej.

Moduł Tate'a dla krzywych eliptycznych i rozmaitości abelowych odzwierciedla własności arytmetyczne tych obiektów. Podobnie jest dla modułów Drinfelda.

Niech ϕ będzie modułem Drinfelda zdefiniowanym nad ciałem F, L - rozszerzeniem F. Wówczas L jest A-modułem poprzez działanie ϕ. Nazywamy go *grupą Mordella-Weila* i oznaczamy $\phi(L)$.

W przypadku modułów Drinfelda klasyczne twierdzenie Mordella-Weila dla rozmaitości abelowych nie zachodzi, za to zachodzi nieco słabsza własność.

Niech A będzie pierścieniem, M A-modułem. Mówimy, że M jest *łagodnym* A-modułem, gdy każdy jego podmoduł skończonej rangi jest skończenie generowany jako A-moduł. Udowodniono, że

$\phi(L)$ jest łagodnym A-modułem.

Jako wniosek otrzymujemy:

A-moduł $\phi(L)$ jest sumą prostą swojego modułu torsyjnego, który jest skończony i wolnego A-modułu rangi $\aleph_0$.

Główną inspiracją tego doktoratu jest praca Banaszaka-Krasonia ([BK11] – używam numeracji prac z rozprawy) o arytmetyce w klasycznych grupach Mordella-Weila dla rozmaitości abelowych. Powyższy fakt pokazuje, że sytuacja w [BK11] jest istotnie różna od przypadku modułów Drinfelda. Głównym celem doktoratu było użycie i wypracowanie odpowiednich technik do zasady lokalno-globalnej w grupach

Mordella-Weila modułów Drinfelda. Uważam, że bazując na adekwatnej literaturze i własnej inwencji, doktorant osiągnął ten cel. Główny rezultat rozprawy (Twierdzenie 5.1) orzeka:

Niech $\hat{\phi} = \phi_1^{e_1} \times \ldots \times \phi_t^{e_t}$ *będzie t-modułem, gdzie* $\phi_i, 1 \leq i \leq t$ *są parami nieizogenicznymi modułami Drinfelda zdefiniowanymi nad* O_K *i załóżmy, że* $End(\phi_i) = A$. *Niech* $N_i \subset \phi_i(O_K)$ *będzie skończenie generowanym* A*-modułem grupy Mordella-Weila,* $\Lambda \subset N = N_1^{e_1} \times \ldots \times N_t^{e_t}$ A*-podmodułem. Załóżmy, że* $d_i = rank(\phi_i) \geq e_i$ *dla każdego* $1 \leq i \leq t$. *Niech* $P \in N$. *Załóżmy, że dla prawie wszystkich* $\mathcal{P} \in Spec(A)$ *mamy* $red_{\mathcal{P}}(P) \in red_{\mathcal{P}}(\Lambda)$. *Wtedy* $\mathcal{P} \in \Lambda + N_{tor}$.

Jest to zasada lokalno-globalna w teorii modułów Drinfelda. (Dla A-modułu Drinfelda nad K, kładziemy $\mu_\phi(a) = -deg_\tau \phi_a(\tau)$. Istnieje wówczas liczba $d \geqslant 0$ taka, że $\mu_\phi(a) = -d\ deg(a)$. Nazywamy ją *rangą* ϕ). Skrót $red_{\mathcal{P}}(-)$ oznacza standardową redukcję.

Chociaż schemat dowodu Twierdzenia 5.1 jest taki sam jak w pracach o rozmaitościach abelowych, to należy podkreślić zasadnicze różnice pomiędzy sytuacją dla rozmaitości abelowych, a rozpatrywaną przez autora podkategorią t-modułów.

Wymieńmy dwie różnice. Kategoria modułów Drinfelda nie jest półprosta. Dlatego autor rozważa podkategorię t-modułów składającą się z tych t-modułów, które są produktami modułów Drinfelda. Grupa Mordella-Weila modułu Drinfelda nie jest skończenie generowana, dlatego w Twierdzeniu 5.1 rozpatruje się skończenie generowane A-podmoduły N_i odpowiednich grup Mordella-Weila. Rozumowanie autora właściwie uwydatnia te różnice.

Chociaż sformułowanie głównego twierdzenia jest podobne do tego w [BK11], to dowód używa innych narzędzi. Ważne techniczne Twierdzenie 4.2 o gęstości stosuje metodę Ribeta-Bashmakowa udowodnioną niedawno dla modułów Drinfelda przez Häberliego i Pinka. W dowodzie głównego twierdzenia używa się faktu, że obraz odpowiedniej reprezentacji ℓ - adycznej jest otwarty w topologii ℓ - adycznej.

W dalszej części rozprawy doktorant uogólnia kontrprzykład Jossena-Perucci dla zasady lokalno-globalnej dla rozmaitości abelowych do t-modułów.

Pod koniec rozprawy, autor nawiązuje do dynamicznej zasady lokalno-globalnej, studiowanej w niedawnych pracach Barańczuka. Jestem wdzięczny temu matematykowi za szereg informacji o tej tematyce w arytmetycznej geometrii algebraicznej.

I tak przypomnijmy, że jeżeli mamy przestrzeń z ustalonymi endomorfizmami, to gdy mówimy o dynamice tej przestrzeni, to oznacza to, że nie badamy po prostu punktów tej przestrzeni, ale orbity punktów względem endomorfizmów; dla ustalonego punktu P przestrzeni i ustalonego endomorfizmu f definiujemy orbitę jako zbiór

$$\{P, f(P), f(f(P)), f\left(f(f(P))\right), \dots\}$$

W zależności od kontekstu różnie wybiera się endomorfizmy, jeżeli np. mówimy o dynamice arytmetycznej ciała liczb wymiernych, to iterującymi odwzorowaniami będą wielomiany czy ogólniej funkcje wymierne. Można też badać ciągi definiowane rekurencyjnie.

W cytowanej przez doktoranta pracy Barańczuk badał dynamiczne uogólnienie problemu znalezienia liniowej zależności. W oryginalnym problemie mamy:
G - grupę Mordella-Weila rozmaitości abelowej nad ciałem liczbowym;
P - punkt w grupie G;
L - podgrupę grupy G
I pytamy, czy jeżeli prawie wszędzie lokalnie (czyli modulo prawie wszystkie ideały pierwsze) zachodzi warunek

„punkt P należy do podgrupy L",

to czy zachodzi on globalnie?

Barańczuk zastępuje punkty orbitami punktów względem endomorfizmów. Aby metody, których używa działały w przypadku rozmaitości abelowych, musi założyć, że pierścień endomorfizmów jest równy $\mathbb{Z}$, czyli endomorfizm to po prostu odwzorowanie mnożenia przez ustaloną liczbę całkowitą. Pyta on o zasadę lokalno-globalną dla warunku

„orbita ma punkt wspólny z podgrupą L".

Inspirując się pracami Barańczuka [B17], [Ba17], doktorant w twierdzeniach 6.3 i 6.4 dowodzi analogicznych dynamicznych twierdzeń dla grup Mordella-Weila modułów Drinfelda.

Przejdźmy do podsumowań.
Autor rozprawy otrzymał szereg wartościowych rezultatów na temat zasady lokalno-globalnej dla modułów Drinfelda. Są to główne Tw.5.1, Tw.4.2, Tw.4.3, Tw.5.2, Tw.6.3, Tw.6.4. Choć inspirował się on wynikami takich matematyków jak Schinzel, Banaszak – Krasoń, Banaszak – Gajda – Krasoń, Gajda – Górnisiewicz, Jossen – Peruccia, Blinkiewicz, Barańczuk, by wymienić tylko kilku, to umiejętnie wykorzystał

rezultaty o modułach Drinfelda uzyskane przez Häberliego, Pinka, Poonena i innych w swojej dysertacji. Ze swojej strony dodał dużo pomysłowych rozważań matematycznych świadczących o jego talencie.

Rozprawa jest zredagowana bardzo starannie (znalazłem tylko kilka drobnych usterek interpunkcyjnych i gramatycznych, które nie są warte tu wzmianki). Ale co ważniejsze zawiera ona kompetentne wprowadzenie w swoją tematykę, cytując najistotniejsze twierdzenia uzyskane przez poprzedników. Obok wcześniej wymienionych pionierów tej dziedziny wymieńmy także Li, która uzyskała znaczące rezultaty o modułach Drinfelda.

Uważam, że rozprawa doktorska Pana magistra Bondarewicza spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane tego typu rozprawie i wnoszę o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Piotr Pragacz

Warszawa 29.08.2018

Piotr Pragacz