Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
Wydział Matematyki i Informatyki
Prof. Ihor Chyzhykov

Recenzja pracy doktorskiej "Wzrost meromorficznych powierzchni minimalnych i krzywych całkowitych" mgr. Arnolda Kowalskiego

Teoria Nevanlinny lub teoria dysrybucji wartości funkcji meromorficznych jest jednym z najważnieszych osiągnięć analizy w XX wieku. Wkład do tej teorii wnieśli tacy słynni naukowcy jak L. Ahlfors, J. Clunie, D. Drasin, A. Eremenko, A. Goldberg, W. Hayman, W.H.J. Fuchs, M. Tsuji, T. Shimizu, A. Weitsman i inni. Jednym z współczesnych osiągnięć teorii są wyniki matematyka japońskiego K. Yamanoi, który w szczególności udowodnił hipotezę A. Gol'dberga i E. Muesa.

Funkcja przybliżenia $m(r, a, f)$ funkcji meromorficznej f do punktu $a \in \mathbb{C}$ stanowi normę funkcji $\log^+ \frac{1}{|f(z)-a|}$ w metryce $L^1_{[0;2\pi]}$. V. P. Petrenko wprowadził funkcję odchylenia $\mathcal{L}(r, a, f)$, która jest normą przybliżenia funkcji meromorficznej f do punktu $a \in \mathbb{C}$ w metryce jednostajnej. Wielkość odchylenia Petrenki $\beta(a, f)$ jest analogiem defektu Nevanlinny funkcji f w punkcie a. Dokładne oszacowanie górne wielkości odchylenia dla funkcji meromorficznych skończonego rzędu uzyskał V. Petrenko. Dokładne oszacowanie górne dla sumy odchyleń takich funkcji otrzymali I. Marchenko i A. Shcherba.

Teoria dysrybucji wartości funkcji meromorficznych została uogólniona na różne sposoby. Jeden kierunek to ww. teoria Petrenki, jednym z najwybitniejszych przedstawicieli której jest promotor pracy doktorskiej I. Marchenko. Drugim kierunkiem jest teoria krzywych całkowitych, powstała w pracach H. Cartana, H. Weila, J. Weila i L. Ahlforsa. Jako że funkcję meromorficzną w płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ można rozważać jako parę funkcji całkowitych, obiektem tej teorii są wektory o p współrzędnych całkowitych.

Chociaż przestrzeń $\mathbb{R}^3$ nie posiada struktury zespolonej, E. Beckenbach znalazł uogólnienie teorii Nevanlinny w $\mathbb{R}^3$ wprowadzając teorię meromorficznych powierzchni minimalnych. Współrzędnymi takich powierzchni są meromorficzne funkcje harmoniczne izotermiczne. Beckenbach uogólnił klasyczną teorię Nevanlinny rozkładu wartości funkcji meromorficznych wprowadzając odpowiedniki podstawowych pojęć tej teorii dla meromorficznych powierzchni minimalnych. Wprowadzona została również nowa funkcja nazywana funkcją widzialności. Ponadto pokazał on, że norma wektora wodzącego powierzchni $\|\mathbf{x}\|$ jest funkcją subharmoniczną i obliczył miarę Riesza tej funkcji.

Arnold Kowalski w swojej pracy doktorskiej poczynił istotny wkład zarówno do teorii meromorficznych powierzchni minimalnych, jak i do teorii krzywych całkowitych. Podczas, gdy pierwszy rozdział pracy zawiera podstawowe definicje i fakty z zakresu ww. teorii, drugi rozdział został poświęcony wynikom autora uzyskanym w teorii meromorficznych powierzchni minimalnych. Twierdzenie 2.1 uogólnia rezultat

E. Ciechanowicz i I. Marchenki oraz przedstawia dokładne oszacowanie z góry odchylenia Petrenki w punkcie dla powierzchni minimalnej. Twierdzenie 2.4 podaje dokładne oszacowanie dla sumy odchyleń przez defekt Valirona, skąd wynika analog relacji defektów (Wniosek 2.6). W Twierdzeniach 2.6 i 2.7 została oszacowana z dołu rozpiętość meromorficznej powierzchni minimalnej przez wielkości odchylenia i defektu w nieskończoności oraz liczbę rozdzielonych punktów maksimum.

Wszystkie te wyniki oraz rezultaty otrzymane w rozdziale trzecim łączy metoda funkcji T^* A. Baernsteina. W szczególności, zaletą tej metody jest możliwość wzięcia pod uwagę liczby rozdzielonych punktów maksimum meromorficznej powierzchni minimalnej oraz orzymania dokładnych oszacowań. Lematy Rozdziału 2.1 są kluczem do dowodów twierdzeń pracy doktorskiej. Opanowanie tej metody wymagało od Arnolda Kowalskiego głębokiej wiedzy teoretycznej z zakresu analizy.

Moim zdaniem przedstawione rozwiązania podstawowych problemów teorii Petenki dla meromorficznych powierzchni minimalnych stanowią już wystarczającą podstawę aby zdobyć stopień doktora z matematyki. Praca doktorska zawiera jeszcze ponadto Rozdział 3, który dotyczy teorii Petrenki krzywych całkowitych i funkcji algebroidalnych. Zaznaczę że prawie wszystkie udowodnione przez Pana magistra twierdzenia są dokładne, na co wzkazują przykłady w rozdziałach 2.6 i 3.5.

Dysertacja zawiera pewną ilość błędów edytorskich, które nie mają wplywu na wysoką jej ocenę. Na przykład, na s. 24 zamiast m_0 powinno być m, a na s. 26_8 powinno być $u_{\phi}(r_0, a_1)$ zamiast $u_{\phi}(r_0, h_1)$

Podsumowując, uważam, że omawiana praca doktorska spełnia wszelkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim, a mgr Arnold Kowalski zasługuje na nadanie mu stopnia doktora w dyscyplinie matematyka.

Olsztyn, 28.06.2021

dr. hab. Ihor Chyzhykov
Profesor UWM